

## **Eine kleine Genesis der Macht**

– Unterstützung, Unterdrückung, Unterwerfung –

Wilhelm Rödder\*, Andreas Dellnitz\*\*, Elisabeth Leewe\*\*\* und

Elmar Reucher\*\*\*

Diskussionsbeitrag der Privaten Hochschule für Wirtschaft und Technik (PHWT)

Nr. 3 / März 2021

Herausgegeben vom Präsidenten der Hochschule

Alle Rechte liegen bei den Verfassern

\* Forschungsbereich OR der FernUniversität in Hagen

\*\* Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik und Quantitative Methoden der FernUniversität in Hagen

\*\*\* Studienbereich Betriebswirtschaft der Privaten Hochschule für Wirtschaft und Technik (PHWT)

# Eine kleine Genesis der Macht

- Unterstützung, Unterdrückung, Unterwerfung -

## 1 Einleitung

### 1.1 Hinführung zum Thema

Mit dem Suchbegriff „Macht“ findet man in Wikipedia den einleitenden Satz: „Macht bezeichnet die Fähigkeit einer Person oder Gruppe, auf das Verhalten und Denken einzelner Personen, sozialer Gruppen oder Bevölkerungsteile einzuwirken oder sie so zu beeinflussen, dass diese sich ihren Ansichten oder Wünschen unterordnen und sich danach verhalten.“ In der einschlägigen Literatur zur Macht folgt nach ähnlichen Definitionen - wie auch in Wikipedia - stets einiges zur Begriffsgeschichte und die Benennung ihrer Apologeten, eine Kategorisierung von Machtbasen und schließlich ein Überblick über Theorien der Macht. Macht wird hierbei durchweg ausgeübt, erzwungen, durchgesetzt. Sie wird beschrieben, wie sie sich in der Menschheitsgeschichte etabliert hat, sei es in Familien, in Gruppen, in Organisationen oder Staaten. Sie wird beschrieben! Erst in jüngerer Zeit gab es Versuche, Macht über verbale Charakterisierungen hinaus analytisch zu fassen, zu messen. Dazu bedurfte es eines experimentellen Designs, wie z.B. bei [4], oder eines mathematisch-formalen Modells, wie z. B. bei [1], [2] und [5]. Das experimentelle Design waren Tauschnetzwerke, in denen die Akteure mit anderen über sogenannte Creditpoints verhandeln. Mächtig ist dann, wer viele solcher Punkte erlangt. Strukturell ist seine Macht bestimmt durch die Anzahl möglicher Tauschpartner, siehe nochmals [4]. In den formalen Modellen werden Verhaltensannahmen der Akteure gemacht, die sich in mathematischen Gleichungen niederschlagen, siehe nochmals z.B. [2]. Die in unserem Aufsatz entwickelte Theorie ist vielleicht eher diesen letzteren Ansätzen zuzuordnen, geht aber einen neuen Weg bei den Verhaltensannahmen. Wir unterstellen, dass Akteure drei Formen des Umgangs miteinander pflegen: den Versuch der gegenseitigen Unterstützung, den Versuch der gegenseitigen Unterdrückung und den Versuch der Unterordnung eines unter einen anderen Akteur. In allen drei Fällen treffen gewisse Charaktere aufeinander: zwei nach Harmonie strebende, zwei kämpferisch nach Macht strebende Individuen oder ein sich dem anderen aus Schutzbedürfnis heraus unterwerfender Akteur. Lässt man zu, dass diese Relationen in einem Netz von Akteuren zwischen beliebigen Paaren wechselseitig auftreten, entsteht ein Netzwerk, ein 3-Relationengraph erheblicher Komplexität. Unter schwachen Annahmen für das Bildungsgesetz eines solchen Graphen kann man dann folgende Größen quantifizieren:

- die Macht eines jeden Akteurs oder einer Akteursgruppe,
- den Grad wechselseitiger Unabhängigkeit der Akteure im Gesamtnetz.

Damit das gelingt, bedienen wir uns eines konditional-probabilistischen Modells, welches seine Ursprünge in der künstlichen Intelligenz hat.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 1.2 wird auf verwandte Literatur hingewiesen, deren Kenntnis die Lektüre unseres Beitrags erleichtert. In Kapitel 2 stellen wir die Elemente des zu entwickelnden Machtmodells in den Schritten: soziologische Sicht (2.1), graphentheoretische Sicht (2.2) und konditional-probabilistische Sicht (2.3) vor. Kapitel 3 befasst sich mit der Frage nach Machtpotentialen in 3-Relationennetzen. In (3.1) werden Präliminarien geliefert, in (3.2) konkrete Rechenvorschriften erarbeitet und exemplifiziert. Kapitel 4 führt an Machtbildungsprozesse heran und visualisiert für Unterstützungsnetze (4.1), für Unterdrückungsnetze (4.2) und für Unterwerfungsnetze (4.3). Kapitel 5 geht über die reine Visualisierung hinaus und durchleuchtet mathematisch den Machtbildungsprozess in gemischten Netzen. Was passiert bei der Verbindung zweier harmoniebedürftiger (5.1), zweier kämpferischer (5.2), zweier eine Unterwerfungsstrategie bevorzugender Akteure und welche Handlungsempfehlungen ergeben sich daraus oder nicht daraus. In Kapitel 6 schließlich werden die Grenzen der Machtbildung durch Harmoniebestreben und durch Dominanzbestreben aufgezeigt (6.1) und ihre Überwindung durch Unterwerfung und damit Machtübertragung dargestellt (6.2). Ein Beispiel schließt Kapitel 6 ab. Kapitel 7 ist eine Zusammenfassung und zeigt Perspektiven zukünftiger Forschung auf.

## 1.2 Verwandte Literatur

Die mathematischen Grundlagen zu dem hier zu entwickelnden Machtmodell finden sich in der Arbeit „Characterizing the principle of minimum cross-entropy within a conditional-logical framework“ [7]. Aus wenigen Axiomen wird abgeleitet, dass die einzige verzerrungsfreie Adaption einer Wahrscheinlichkeitsverteilung an ein Regelwerk durch Minimierung der Relativen Entropie zur Gleichverteilung bzw. durch Maximierung der Entropie erfolgt. Aufbauend auf diesen Grundlagen entstand die Expertensystemshell SPIRIT [14], die diese Adaption numerisch unterstützt. Da die Shell auch in diesem Aufsatz Verwendung findet, weisen wir auf eine Anleitung zu ihrer Nutzung hin [12]; die Shell ist im Netz frei verfügbar. Im Machtkontext wurden bereits mehrere regelbasierte Modelle entwickelt, sie sind in folgenden Artikeln dargestellt:

- Entropy based evaluation of net structures - deployed in Social Network Analysis [9]. Hier werden soziale Netzwerke in Form gerichteter Graphen in konditional-probabilistische Regelsysteme überführt und damit ableitbare Eigenschaften von Akteuren und Gesamtnetz - wie etwa Diffusions- und Rezeptionspotential eines Akteurs oder die Netzdichte - vorgestellt.

- Compressing strongly connected subgroups in social networks: an entropy-based approach [3]. Hier werden Netzvereinfachungen durch Verdichtung erarbeitet: Starke Zusammenhangskomponenten des Netzes können ohne Informationsverlust auf sogenannte Superknoten reduziert werden.
- An entropy-based framework to analyze structural power and power alliances in social networks [5]. Hier wird für ein Netz mit Akteuren, die sich gegenseitig zu unterdrücken versuchen, ein Machtmodell aufgebaut. Die Indizes struktureller Macht werden mit denen aus Tauschnetzen verglichen. Das bekannte 9/11-Netz wird mathematisch untersucht.
- Liberté, Égalité, Fraternité - a power study in signed networks [10]. Hier wird neben der Unterdrückung als machtbildender Faktor auch die gegenseitige Unterstützung betrachtet. Das graphische Vehikel ist dann das signierte Netz und sein konditional-probabilistisches Pendant, in dem Machtindizes aller Akteure und ein Maß ihrer Unabhängigkeit/Abhängigkeit voneinander berechenbar sind.

Für ein schnelles Einarbeiten in den Themenkreis zur Machtmessung eignet sich der letztgenannte Beitrag am besten, da er Ideen aus älteren Arbeiten aufgreift und vertieft.

Im Folgekapitel sind die Machtbildungsfaktoren unseres Modells verbal zu präzisieren, als Elemente eines Graphen zu beschreiben und dann in das konditional-probabilistische Regelwerk zu überführen.

## 2 Faktoren der Machtbildung

### 2.1 Faktoren der Machtbildung aus soziologischer Sicht

Treffen zwei Elemente aus einer Menge von Akteuren aufeinander, entstehen - in diesem Beitrag - die folgenden Relationen zwischen ihnen:

- die leere Relation LER. Zwischen den Akteuren entsteht keine direkte machtbildende Beziehung. Nicht ausgeschlossen sind jedoch indirekte Relationen über dritte Akteure.
- die wechselseitige Unterstützungsrelation USR. Die Akteure versichern sich gegenseitig, im Falle des Machterhalts diese Macht an den anderen weiterzugeben, z.B. zwecks Ausübung auf Dritte. Die Relation ist symmetrisch.
- die wechselseitige Unterdrückungsrelation UDR: Ein Akteur versucht, unter Einsetzung eigener Macht den anderen zu unterdrücken. Da jener diesen machtlosen Zustand vermeiden will, wehrt er sich mit einem gleichen Unterdrückungsversuch. Die Relation ist ebenfalls symmetrisch.

- die einseitige Unterwerfung UWR. Ein Akteur unterwirft sich dem anderen und dieser akzeptiert. Diese Akzeptanz bedeutet die Verpflichtung, bei Machterhalt diese an den Unterworfenen weiterzugeben und ihn gegenüber Dritten stark zu machen. Trotz der Asymmetrie der Beziehung besteht die Notwendigkeit beider Parteien, dieses Abkommen in Zukunft einzuhalten. Unterwerfung bedeutet Stärkung des Machtpotentials des akzeptierenden Akteurs.

Die vorgestellten Relationen sind omnipräsent in unserer Gesellschaft:

- LER beobachtet man immer dann, wenn die Akteure völlig unabhängig voneinander sind und es auch bleiben wollen - es sei denn, Dritte zerstören diesen Wunsch.
- USR ist typisch für Cliques in Schulklassen oder für studentische Verbindungen u.A. „Alle für einen, einer für alle“
- UDR ist wechselseitige Meinungs- bzw. Handlungsbeeinflussung, siehe nochmals den einleitenden Satz aus Wikipedia in Abschnitt 1.1. „Jeder gegen jeden“ charakterisiert recht zutreffend diese Relation.
- UWR findet sich in allen Lebensbereichen; in Familien, Unternehmen, politischen Parteien und zwischen Staaten. „Geben und nehmen“ mag das Essentielle dieser Relation widerspiegeln.

## 2.2 Faktoren der Machtbildung aus graphentheoretischer Sicht

Ein Graph ist eine Menge von Knoten und Kanten, die einige der Knoten verbinden. Im Machtkontext repräsentieren die Knoten Akteure und die Kanten Beziehungen oder Relationen zwischen ihnen. In dieser Schrift betrachten wir in Anlehnung an den vorigen Abschnitt folgende Relationen und ihre Entsprechung im Graphen:

- die leere Relation LER. Es gibt keine Kante zwischen in dieser Relation stehenden Akteuren.
- die wechselseitige Unterstützungsrelation USR. Die Kante  $\overset{+}{-}$  repräsentiert USR. Sind zwei Knoten durch  $\overset{+}{-}$  verbunden, überträgt sich evidente Macht von einem Akteur auf den anderen und umgekehrt. USR ist also symmetrisch, und USR ist transitiv: Bei Machterhalt eines Akteurs wird sie an jeden  $\overset{+}{-}$  adjazenten Nachbarn weitergegeben.
- die wechselseitige Unterdrückungsrelation UDR. Die Kante  $\overset{-}{-}$  repräsentiert UDR. Diese ebenfalls symmetrische Relation ist nicht transitiv. Gelingt es einem Akteur durch Ausübung seiner Macht, den  $\overset{-}{-}$  adjazenten Nachbarn zu unterdrücken, wird dieser vollkommen machtlos.

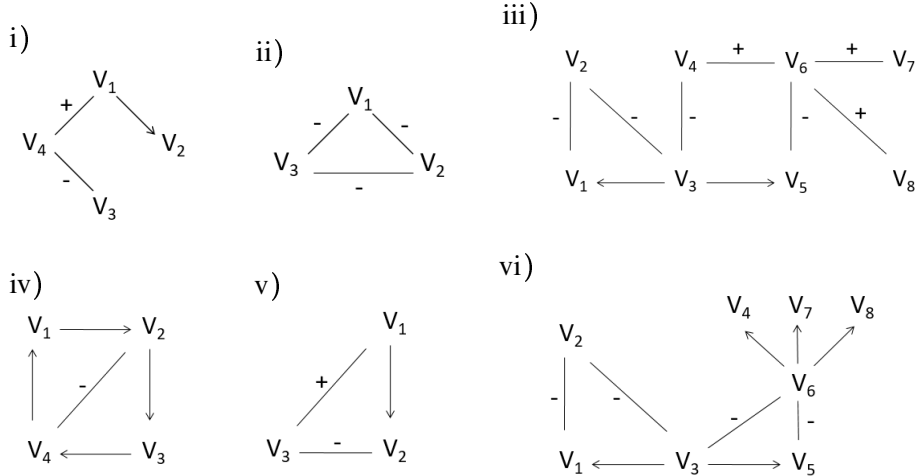
- die einseitige Unterwerfung/ Machtübertragung UWR. Die gerichtete Kante  $\rightarrow$  repräsentiert UWR. Dem mit  $\rightarrow$  positiv inzidenten Akteur wird von dem negativ inzidenten Akteur Machtpotential übertragen, er unterwirft sich dem ersteren. Wird bei diesem Macht evident, gibt er sie an seinen Schützling zwecks eventueller Ausübung auf Dritte weiter. UDR ist nicht symmetrisch, aber transitiv.

$(\mathcal{V}, \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^- \cup \mathcal{E}^{\rightarrow})$  ist ein 3-Relationengraph, wobei  $\mathcal{V}$  die Knoten und  $\mathcal{E}^+$ ,  $\mathcal{E}^-$ ,  $\mathcal{E}^{\rightarrow}$  die entsprechenden Kantenmengen bedeuten. Eine unbedachte Vergabe von Kanten kann zu Widersprüchen führen. Ist ein Akteur von einem anderen durch  $\xrightarrow{+}$  und  $\rightarrow$  erreichbar, darf nicht auch eine direkte  $\xrightarrow{-}$  Verbindung bestehen. (Indirekte) Machtweitergabe ist mit (direkter) Unterdrückung unverträglich. Man vergleiche hierzu ähnliche Überlegungen in [8], Seite 206ff. Um solche Widersprüche zu vermeiden, fordern wir Zulässigkeit für 3-Relationsgraphen wie in Definition 1.

**Definition 1.** Ein 3-Relationengraph  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^- \cup \mathcal{E}^{\rightarrow})$  ist zulässig, wenn je zwei durch  $\xrightarrow{+}$  und  $\rightarrow$  erreichbare Akteure nie durch  $\xrightarrow{-}$  direkt verbunden sind.

Beispiel 1 verdeutlicht die Zusammenhänge.

**Beispiel 1** (zulässige und nicht zulässige 3-Relationengraphen)



i), ii), iii), vi) sind zulässig, iv) und v) sind es nicht. i), iii) und vi) werden in den weiteren Abhandlungen wieder aufgegriffen.

Die einschlägige Literatur hält Verfahren zur Zulässigkeitsüberprüfung bereit. Hierzu wird die Erreichbarkeitsmatrix gebildet, siehe z.B. [6] S. 107, und dann die Einträge auf negative Adjazenz überprüft.

Im Folgeabschnitt werden die Machtbildungsfaktoren ins konditional-probabilistische Modell übertragen.

## 2.3 Faktoren der Machtbildung aus konditional-probabilistischer Sicht

Es sei  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^+ \dot{\cup} \mathcal{E}^- \dot{\cup} \mathcal{E}^{\rightarrow})$  ein 3-Relationengraph mit  $|\mathcal{V}| = n$ . Jeder Knoten  $V_i \in \mathcal{V}$  ist eine boolesche Variable mit  $V_i = 1$  oder  $V_i = 0$ . Falls nicht missverständlich, schreiben wir gelegentlich auch  $V_i$  oder  $\bar{V}_i$ . Für  $V_i = 1$  hat der dem Knoten  $V_i$  zugeordnete Akteur Macht, für  $V_i = 0$  ist er machtlos.  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = (V_1 = 1/0, V_2 = 1/0, \dots, V_n = 1/0) = V_1/\bar{V}_1, V_2/\bar{V}_2, \dots, V_n/\bar{V}_n$  sind  $2^n$  Zustände oder Konfigurationen. Auf der Menge der Konfigurationen  $\{\mathbf{v}\}$  sitzen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $Q$ , die die Machtbeziehungen widerspiegeln. Dazu müssen sie sogenannte probabilistische Konditionale erfüllen:

- $Q(V_j = 1 \mid V_i = 1) = 1$ . und  $Q(V_i = 1 \mid V_j = 1) = 1$ . für  $(i, j) \in \mathcal{E}^+$  (1+)
- $Q(V_j = 0 \mid V_i = 1) = 1$ . und  $Q(V_i = 0 \mid V_j = 1) = 1$ . für  $(i, j) \in \mathcal{E}^-$  (1-)
- $Q(V_j = 1 \mid V_i = 1) = 1$ . für  $(i, j) \in \mathcal{E}^{\rightarrow}$  (1 $\rightarrow$ )
- $Q(V_i = 1) = 1$ . für einige Knoten  $i$  (1E)

Konditionale oder Regeln der Kategorie (1+) bedeuten wechselseitige Machtübertragung USR, die der Kategorie (1-) bedeuten wechselseitige Unterdrückung UDR, die der Kategorie (1 $\rightarrow$ ) bedeuten Unterwerfung UWR von  $V_j$  unter  $V_i$ . Gleichungen der Kategorie (1E) sind unkonditionierte Fakten, dass die  $V_i$  evident mächtig sind, statt eines konditionalen „Falls sie es sind“. Die Semantik der Konditionale wurde in Abschnitt 2.1 erläutert: „Alle für einen und einer für alle“; „Jeder gegen jeden“; „Geben und nehmen“.

Damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung die intendierten Abhängigkeiten zwischen den Variablen  $V \in \mathcal{V}$  verzerrungsfrei wiedergibt, muss sie sorgsam ausgewählt werden. Dazu bedient man sich Optimierungsvorschriften, die aus der KI stammen. Man maximiert unter vorgegebenen Konditionalen die Entropie  $H(Q) = -\sum_{\mathbf{v}} Q(\mathbf{v}) \log_2 Q(\mathbf{v})$ . Dieses MaxEnt-Prinzip wurde von Kern-Isberner [7] entwickelt und wird in Abschnitt 3.1 auf 3-Relationennetze angewandt.  $H(Q)$  ist ein inverses Maß der Stringenz von Machtbeziehungen in  $Q$  auf  $\{\mathbf{v}\}$ ; je weniger Machtbeziehungen, umso größer ist  $H$ . Maximiert man  $H$  unter Einhaltung der vorgegebenen Konditionale, bedeutet das eine vorsichtige Adaption von  $Q$  an die geforderte Konditionalstruktur. Die Akteure sind so abhängig wie nötig, aber so unabhängig wie möglich.

## 3 Machtpotentiale in 3-Relationennetzen

### 3.1 Das MaxEnt-Prinzip

Nach den Vorbereitungen im letzten Abschnitt geben wir nun die Optimierungsaufgaben zur Berechnung von  $Q$  an, erläutern und exemplifizieren.

$$\begin{aligned}
Q_+ &= \arg \max H(Q) \\
&\text{u.d.N. } Q(V_j = 1 \mid V_i = 1) = 1. \\
&\quad Q(V_i = 1 \mid V_j = 1) = 1. \qquad \text{für } (i, j) \in \mathcal{E}^+ \qquad (2+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_- &= \arg \max H(Q) \\
&\text{u.d.N. } Q(V_j = 0 \mid V_i = 1) = 1. \\
&\quad (Q(V_i = 0 \mid V_j = 1) = 1.) \qquad \text{für } (i, j) \in \mathcal{E}^- \qquad (2-)
\end{aligned}$$

Da redundant, können die Konditionale in Klammern entfallen.

$$\begin{aligned}
Q_{\rightarrow} &= \arg \max H(Q) \\
&\text{u.d.N. } Q(V_j = 1 \mid V_i = 1) = 1. \qquad \text{für } (i, j) \in \mathcal{E}^{\rightarrow} \qquad (2\rightarrow)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{+\rightarrow} &= \arg \max H(Q) \\
&\text{u.d.N. wie in } (2+), (2-) \text{ und } (2\rightarrow) \qquad (2+- \rightarrow)
\end{aligned}$$

In (2+) übertragen sich die durch  $V_i, V_j$  repräsentierten Akteure wechselseitig die Macht, in (2-) unterdrücken sie wechselseitig die Macht, in (2 $\rightarrow$ ) unterwirft sich Akteur  $V_j$  dem  $V_i$ , und in (2+-  $\rightarrow$ ) treten alle drei Relationen auf.

Wir merken an, dass nach Lösen von Aufgabe (2+-  $\rightarrow$ ) gilt:  $Q_{+\rightarrow}(V_i = 1) < 1$  für alle  $V_i, i = 1, \dots, n$ . Unter Konditionalen oder Regeln kann die Macht eines Akteurs immer nur potentiell, aber niemals evident werden. Die Aussage folgt sofort aus [11], Theorem 3 (Iterative Proportional Fitting). Wird Macht evident, ist das als Faktum mitzuteilen; siehe Gleichungen (1E) im vorigen Abschnitt.

Die Optimierungsaufgabe (3) exemplifiziert das 3-Relationennetz wie in Beispiel 1iii). Dieses Netz ist zulässig und der Zulässigkeitsbereich von (3) damit nicht leer. Anders bei der Optimierungsaufgabe zu Beispiel 1v). Für z.B.  $Q(V_3 = 1) = 1$  folgt  $Q(V_2 = 1) = 1$  und auch  $Q(V_2 = 1) = 0$ , ein Widerspruch.

$$\begin{aligned}
Q_{+\rightarrow} &= \arg \max H(Q) \\
&\text{u.d.N. } Q(V_1 = 1 \mid V_3 = 1) = 1. & Q(V_5 = 1 \mid V_3 = 1) = 1. \\
&\quad Q(V_4 = 1 \mid V_6 = 1) = 1. & Q(V_6 = 1 \mid V_4 = 1) = 1. \\
&\quad Q(V_7 = 1 \mid V_6 = 1) = 1. & Q(V_6 = 1 \mid V_7 = 1) = 1. \\
&\quad Q(V_8 = 1 \mid V_6 = 1) = 1. & Q(V_6 = 1 \mid V_8 = 1) = 1. \\
&\quad Q(V_2 = 0 \mid V_1 = 1) = 1. & Q(V_2 = 0 \mid V_3 = 1) = 1. \\
&\quad Q(V_4 = 0 \mid V_3 = 1) = 1. & Q(V_6 = 0 \mid V_5 = 1) = 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

In Abschnitt 6.2 wird das Beispiel wieder aufgegriffen und berechnet; die Ergebnisse werden kommentiert. Zunächst jedoch fahren wir fort mit der Beschreibung des Konzepts Machtpotential.



### 3.2 Das Konzept Machtpotential

Ist Aufgabe (2+- →) gelöst, ist mit  $H(Q_{+-\rightarrow})$  das globale Maß der konditionalen Machtunabhängigkeit aller Akteure bestimmt. Man vergleiche nochmals die Ausführungen am Ende des Abschnitts 2.3. Die Kenntnis von  $Q_{+-\rightarrow}$  ermöglicht aber auch die Berechnung des Machtpotentials aller Knoten  $\hat{=}$  Akteure im Netz.  $Q_{+-\rightarrow}(V_i = 1)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass Knoten  $V_i$  machtvoll ist. Teilt man dem Modell nun mit, dass er nicht nur wahrscheinlich, sondern sogar sicher mächtig ist, bedeutet dies Zusatzinformation bzgl. der gesamten Machtstruktur im Netz. Wie in [5] ausgeführt, berechnet sich diese Strukturänderung über die Entropieabnahme. Laut Informationstheorie [15], [13] beträgt die Zusatzinformation  $-\log_2 Q_{+-\rightarrow}(V_i = 1)$ ; das ist das Potential in  $V_i$  zur gleichwertigen Strukturänderung der Macht im Netz. Damit haben wir

**Definition 2.** (Machtpotentiale von Knoten in 3-Relationennetzen)

$sm_i = -\log_2 Q_{+-\rightarrow}(V_i = 1)$  ist das Machtpotential von Knoten  $V_i, i = 1, \dots, n$ .

Für das kleine Netz i) in Beispiel 1 berechnen wir die Netzentropie und die Machtpotentiale aller Knoten.

**Beispiel 2.** (Entropie und Machtpotentiale für ein 3-Relationennetz)

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit aller Konfigurationen zu Beispiel 1i) gemäß Aufgabe (2+- →) zeigt folgende Kontingenztafel.

| $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $Q_{+-\rightarrow}$ | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $Q_{+-\rightarrow}$ |
|-------|-------|-------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------|
| 1     | 1     | 1     | 1     | 0                   | 0     | 1     | 1     | 1     | 0                   |
| 1     | 1     | 1     | 0     | 0                   | 0     | 1     | 1     | 0     | $\frac{1}{5}$       |
| 1     | 1     | 0     | 1     | $\frac{1}{5}$       | 0     | 1     | 0     | 1     | 0                   |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 0                   | 0     | 1     | 0     | 0     | $\frac{1}{5}$       |
| 1     | 0     | 1     | 1     | 0                   | 0     | 0     | 1     | 1     | 0                   |
| 1     | 0     | 1     | 0     | 0                   | 0     | 0     | 1     | 0     | $\frac{1}{5}$       |
| 1     | 0     | 0     | 1     | 0                   | 0     | 0     | 0     | 1     | 0                   |
| 1     | 0     | 0     | 0     | 0                   | 0     | 0     | 0     | 0     | $\frac{1}{5}$       |

Damit ergibt sich:  $sm_1 = 2.32, sm_2 = 0.74, sm_3 = 1.32, sm_4 = 2.32, H = 2.32$ .  $V_1$  ist sehr mächtig, weil sich ihm  $V_2$  unterwirft.  $V_2$  unterwirft sich  $V_1$  und hat geringe Macht.  $V_4$  ist gleichmächtig mit  $V_1$ , sie unterstützen einander.  $V_3$  ist mächtig, weil er  $V_4$  und mit diesem auch  $V_1$  unterdrücken kann.  $H$  wäre für ein Netz mit vollständig fehlenden Beziehungen gleich 4., bei vollständiger Unterstützung aller durch alle gleich 1 und für das Netz 2i) ist  $H = 2.32$ .

Wir merken an, dass Veränderungen im Netz Veränderungen von Machtpotentialen und Veränderung von  $H$  bedeuten. Ein Hauptziel dieses Aufsatzes ist das Verstehen solcher Veränderungsprozesse. Machtverhältnisse im sozialen Netz sind

nicht einfach vorhanden, sondern unterliegen einem ständigen Wandel. Machtgenese statt bloßer Zustandsbeschreibung. Im folgenden Kapitel 4 zeigen wir beispielhaft solche Veränderungsprozesse auf, um sie dann in Kapitel 5 mathematisch vertiefend zu analysieren.

## 4 Beispiele von Veränderungsprozessen in Unterstützungs-, Unterdrückungs- und Unterwerfungsnetzen

### 4.1 Veränderungen in Unterstützungsnetzen

Wir betrachten sieben  $\pm$  Netze wie in Abbildung 1, berechnen jeweils  $Q_+$  gemäß (2+), die Machtpotentiale aller Knoten und  $H$ . Fehlende Kanten sind Leerrelationen; zu 1. z.B. ist die Menge der Nebenbedingungen leer, in  $Q_+$  sind alle Kanten unabhängig. Die Ergebnisse der Berechnungen finden sich in Tabelle 1.

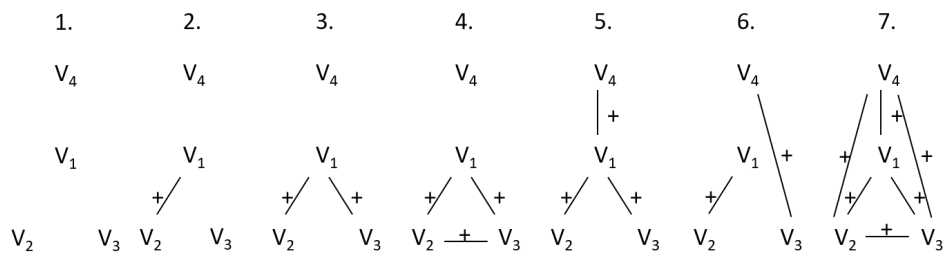


Abbildung 1: Eine Auswahl von Unterstützungsnetzen mit 4 Knoten

| Netznr. | 1.            | 2.            | 3.            | 4.            | 5.            | 6.            | 7.            |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $Q_+$   |               |               |               |               |               |               |               |
| $V_1$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $V_2$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $V_3$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $V_4$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $sm_1$  | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             |
| $sm_2$  | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             |
| $sm_3$  | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             |
| $sm_4$  | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             |
| $H$     | 4             | 3             | 2             | 2             | 1             | 2             | 1             |

Tabelle 1: Parameter zu ausgewählten Unterstützungsnetzen

Wie man leicht aus entsprechenden Kontingenztafeln abliest, ist die Wahrscheinlichkeit von  $V_i$  stets  $\frac{1}{2}$ ; für jedes Netz. Damit haben alle Knoten die Macht

$sm = 1$ . Jede starke Zusammenhangskomponente - auch eine einelementige - hat Entropie 1. Die Netzentropie fällt also mit fallender Anzahl von Zusammenhangskomponenten. Hinzufügen von  $\bar{+}$  Relationen dient anscheinend nicht dem Machtgewinn der Akteure, sondern der wechselseitigen Unterstützung: „Alle für einen, einer für alle“

## 4.2 Veränderungen in Unterdrückungsnetzen

Wir betrachten sieben  $\bar{-}$  Netze wie in Abbildung 2, berechnen jeweils  $Q_-$  gemäß (2-), die Machtpotentiale aller Knoten und  $H$ . Fehlende Kanten sind wiederum Leerrelationen. Die Rechenergebnisse finden sich in Tabelle 2. Anschließend werden sie kommentiert.

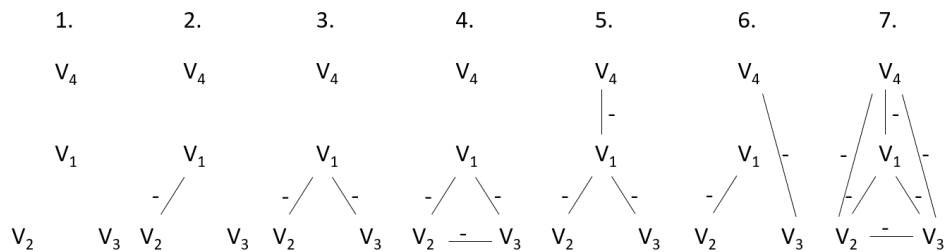


Abbildung 2: Eine Auswahl von Unterdrückungsnetzen mit 4 Knoten

| Netznr. | 1.            | 2.            | 3.             | 4.            | 5.            | 6.            | 7.            |
|---------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $Q_-$   |               |               |                |               |               |               |               |
| $V_1$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $V_2$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $V_3$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $V_4$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $sm_1$  | 1             | 1.585         | 2.322          | 2             | 3.170         | 1.585         | 2.322         |
| $sm_2$  | 1             | 1.585         | 1.322          | 2             | 1.170         | 1.585         | 2.322         |
| $sm_3$  | 1             | 1             | 1.322          | 2             | 1.170         | 1.585         | 2.322         |
| $sm_4$  | 1             | 1             | 1              | 1             | 1.170         | 1.585         | 2.322         |
| $H$     | $\log_2 16$   | $\log_2 12$   | $\log_2 10$    | $\log_2 8$    | $\log_2 9$    | $\log_2 9$    | $\log_2 5$    |

Tabelle 2: Parameter zu ausgewählten Unterdrückungsnetzen

Ein Knoten wird mächtiger, wenn er einen zusätzlichen Unterdrückungsversuch startet. Startet der Gegner seinerseits einen weiteren Unterdrückungsversuch,

schwächt sich der Macht des ersteren Knotens wieder ab. Die höchste Macht erreicht Knoten  $V_1$  in der Sternfigur 5. Im vollständigen Unterdrückungsnetz 7 sind alle Knoten gleich mächtig und die Entropie als Unabhängigkeitsmaß aller Knoten die kleinste unter allen betrachteten Netzen. Sie ist aber noch erheblich größer als im vollständigen Graphen des vorigen Abschnitts. Hinzufügen einer  $\leftarrow$  Relation dient anschaulich dem Machtgewinn oder der Machtverhinderung anderer. „Jeder gegen jeden“.

### 4.3 Veränderungen in Unterwerfungsnetzen

Hier studieren wir Unterwerfungsnetze wie in Abbildung 3, berechnen Machtpotentiale der Knoten und  $H$  und stellen die Ergebnisse in Tabelle 3 dar.

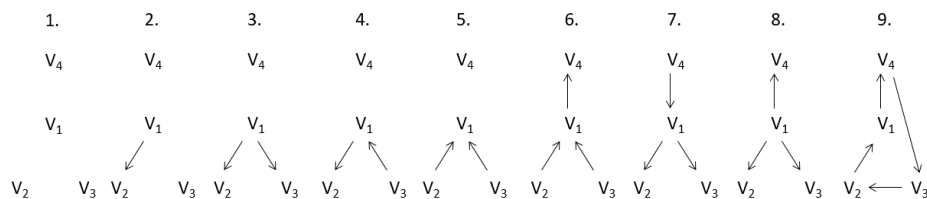


Abbildung 3: Eine Auswahl von Unterwerfungsnetzen mit 4 Knoten

| Netznr.           | 1.            | 2.             | 3.             | 4.            | 5.             | 6.            | 7.            | 8.            | 9.            |
|-------------------|---------------|----------------|----------------|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $Q_{\rightarrow}$ |               |                |                |               |                |               |               |               |               |
| $V_1$             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{12}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{8}{10}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $V_2$             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{8}{12}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $V_3$             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{6}{12}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $V_4$             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{6}{12}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $sm_1$            | 1             | 1.585          | 2.322          | 1             | 0.322          | 0.585         | 1.585         | 3.170         | 1             |
| $sm_2$            | 1             | 0.585          | 0.737          | 0.415         | 1.322          | 1.585         | 0.585         | 0.848         | 1             |
| $sm_3$            | 1             | 1              | 0.737          | 2             | 1.322          | 1.585         | 0.585         | 0.848         | 1             |
| $sm_4$            | 1             | 1              | 1              | 1             | 1              | 0.263         | 2.585         | 0.848         | 1             |
| $H$               | $\log_2 16$   | $\log_2 12$    | $\log_2 10$    | $\log_2 8$    | $\log_2 10$    | $\log_2 6$    | $\log_2 6$    | $\log_2 9$    | $\log_2 2$    |

Tabelle 3: Parameter zu ausgewählten Unterwerfungsnetzen

Diesmal ist die Relation asymmetrisch, und damit sind die Ergebnisse vielschichtiger. Zunächst ist der mit dem Pfeil positiv inzidente Knoten mächtiger als der negativ inzidente. In z.B. Netz 2. wird dem  $V_1$  von  $V_2$  Macht übertragen, wie es auch sein soll. Je mehr Akteure ihm Macht übertragen, umso mächtiger wird er, siehe Netze 3. und 7. Machterhalt und gleichzeitige Unterwerfung eines Akteurs neutralisieren sich, siehe Netz 4. Mehrfache Unterwerfung schwächt den Akteur,

siehe Netz 5. Der mächtigste Knoten in Abbildung 6 ist natürlich  $V_1$  in der Sternanordnung Netz 8. Die Situation in Netz 9. ist graphentheoretisch die einer starken Zusammenhangskomponente, soziologisch die einer zyklischen Unterwerfung mit der Folge gleicher Macht für alle. Am besten scheint „Geben und nehmen“ diesen Veränderungsprozess anzuregen.

Halten die aus kleinen Beispielen abgeleiteten, vermuteten Machtbildungsfaktoren Harmoniebedürfnis, Unterdrückungswille und Unterwerfungsbereitschaft auch einer mathematischen Analyse in gemischten Netzen statt? Die Beantwortung dieser Frage ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

## 5 Machtbildungsprozesse im gemischten USR-/ UDR-/ UWR-Netz

### 5.1 Die Unterstützung im gemischten Netz

Gegenstand der Untersuchung in diesem Abschnitt ist die Machtveränderung der beteiligten Akteure bei Eingehen einer Unterstützungsrelation. Abbildung 4 verdeutlicht die Zusammenhänge.

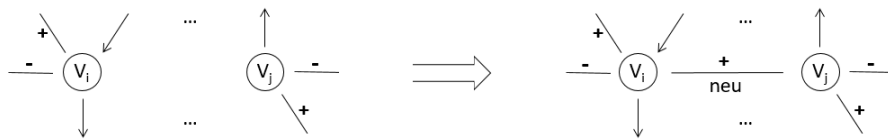


Abbildung 4: Eingehen einer Unterstützungsrelation zwischen  $V_i$  und  $V_j$

Wir untersuchen vier Szenarien, d.h. hier vier Randverteilungen auf den Ausprägungen  $V_i V_j, V_i \bar{V}_j, \bar{V}_i V_j, \bar{V}_i \bar{V}_j$ . Für jede dieser Randverteilungen wird die durch proportionales Skalieren berechnete Randverteilung nach Eingehen der Unterstützungsrelation ausgewiesen. Proportionales Skalieren bedeutete hier: Wahrscheinlichkeit = 0 der durch die neue Relation verbotenen Konfigurationen und auf 1. Normieren der übrigen. Die Zusammenhänge sind übersichtlich in Tabelle 4 dargestellt.

| Szenario 1            |        |                  | Szenario 2 |                 | Szenario 3 |                 | Szenario 4 |                 |
|-----------------------|--------|------------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|
|                       | vorher | nachher          | vorher     | nachher         | vorher     | nachher         | vorher     | nachher         |
|                       | $Q_v$  | $Q_n$            | $Q_v$      | $Q_n$           | $Q_v$      | $Q_n$           | $Q_v$      | $Q_n$           |
| $V_i V_j$             | 0.25   | 0.5              | 0.1        | $0.\bar{1}$ ... | 0.8        | $0.\bar{8}$ ... | 0.1        | $0.\bar{1}$ ... |
| $V_i \bar{V}_j$       | 0.25   | 0                | 0.01       | 0               | 0.04       | 0               | 0.05       | 0               |
| $\bar{V}_i V_j$       | 0.25   | 0                | 0.09       | 0               | 0.06       | 0               | 0.05       | 0               |
| $\bar{V}_i \bar{V}_j$ | 0.25   | 0.5              | 0.8        | $0.\bar{8}$ ... | 0.1        | $0.\bar{1}$ ... | 0.8        | $0.\bar{8}$ ... |
| $Q_v(V_i) = 0.5$      |        | $Q_n(V_i) = 0.5$ | =0.11      | = $0.\bar{1}$   | =0.84      | = $0.\bar{8}$   | =0.15      | = $0.\bar{1}$   |
| $Q_v(V_j) = 0.5$      |        | $Q_n(V_j) = 0.5$ | =0.19      | = $0.\bar{1}$   | =0.86      | = $0.\bar{8}$   | =0.15      | = $0.\bar{1}$   |
| $sm_i$                | =1.    | =1.              | =3.184     | =3.170          | =0.252     | =0.167          | =2.737     | =3.1            |
| $sm_j$                | =1.    | =1.              | =2.396     | =3.170          | =0.218     | =0.167          | =2.737     | =3.1            |

Tabelle 4: Parameter von  $V_i$  und  $V_j$  bei Eingehen von USR

Zusammenfassend ist festzustellen, dass

- in Szenario 1  $V_i$  und  $V_j$  gleichmächtig bleiben,
- in Szenario 2  $V_i$  weniger und  $V_j$  mehr Macht erhält,
- in Szenario 3  $V_i$  und  $V_j$  Macht verlieren,
- in Szenario 4  $V_i$  und  $V_j$  Macht gewinnen.

Der gegenseitige Unterstützungshandschlag ändert die Machtverhältnisse der beteiligten Akteure situationsabhängig. Auf diese Situation haben sie keinen Einfluss, sie ist vielmehr im Netz vorgegeben. Falls sie USR eingehen, bilden sie eine starke Zusammenhangskomponente, werden sie gleichmächtig; siehe hierzu nochmals [3]. Das Versprechen wechselseitiger Unterstützung dominiert das individuelle Machtstreben. Dazu gibt es effektivere Maßnahmen, wie die beiden Folgeabschnitte zeigen.

## 5.2 Die Unterdrückung im gemischten Netz

Hierzu studieren wir die Machtveränderung der beteiligten Akteure bei Eingehen von Unterdrückungsrelationen. Abbildung 5 verdeutlicht die Zusammenhänge.

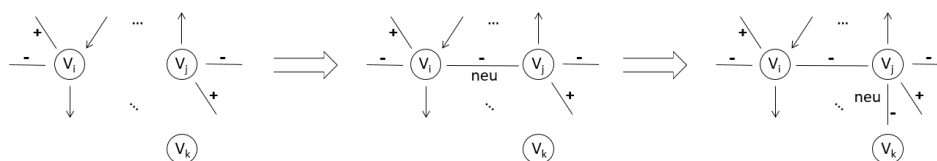


Abbildung 5: Eingehen zweier Unterdrückungsrelationen zwischen  $V_i$ ,  $V_j$  und dann  $V_j$ ,  $V_k$

Zunächst gehen  $V_i$  und  $V_j$  eine Unterdrückungsrelation ein, mit Konsequenzen für ihre Machtpotentiale. Dann gehen  $V_j$  und  $V_k$  eine ebensolche Relation ein, natürlich mit ebensolchen Konsequenzen für ihre Machtpotentiale; aber auch mit Konsequenzen für das Potential von  $V_i$ . Wir formulieren und beweisen folgenden

Satz 1.

**Satz 1.** Es sei  $Q$  eine 3 Relationenverteilung, in der die  $\text{---}$  Relationen zwischen Knoten  $V_i, V_j$  und  $V_j, V_k$  möglich, aber noch nicht vollzogen sind.

- a. Gehen  $V_i$  und  $V_j$  eine Unterdrückungsrelation ein, so erhöht sich unter proportionaler Skalierung das Machtpotential beider Knoten.
- b. Gehen zusätzlich  $V_j$  und  $V_k$  eine Unterdrückungsrelation ein, so erhöht sich das Machtpotential beider Knoten und verringert das von  $V_i$ .

Beweis:

a. Nach Voraussetzung gilt  $Q(V_i) < 1., Q(V_j) < 1.$  und  $Q(V_i V_j) > 0.$

$Q(V_i V_j)$  sei die Randverteilung auf  $V_i V_j.$   $\hat{Q}(V_i V_j) = 0$

$Q(V_i \bar{V}_j)$  Durch die  $\text{---}$  Kante und  $\hat{Q}(V_i \bar{V}_j) = Q(V_i \bar{V}_j)/(1 - Q(V_i V_j))$

$Q(\bar{V}_i V_j)$  proportionales Skalieren wird  $\hat{Q}(\bar{V}_i V_j) = Q(\bar{V}_i V_j)/(1 - Q(V_i V_j))$

$Q(\bar{V}_i \bar{V}_j)$  die neue Verteilung zu  $\hat{Q}(\bar{V}_i \bar{V}_j) = Q(\bar{V}_i \bar{V}_j)/(1 - Q(V_i V_j))$

Nun gilt:

$$Q(V_i) > \hat{Q}(V_i) \quad \Leftrightarrow$$

$$Q(V_i V_j) + Q(V_i \bar{V}_j) > Q(V_i \bar{V}_j)/(1 - Q(V_i V_j)) \quad \Leftrightarrow$$

$$Q(V_i V_j) + Q(V_i \bar{V}_j) - Q(V_i V_j)^2 - Q(V_i \bar{V}_j) \cdot Q(V_i V_j) > Q(V_i) - Q(V_i V_j) \quad \Leftrightarrow$$

$$-Q(V_i V_j)^2 - Q(V_i \bar{V}_j) \cdot Q(V_i V_j) > -Q(V_i V_j) \quad \Leftrightarrow$$

$$-Q(V_i V_j) \cdot Q(V_i) > -Q(V_i V_j)$$

Das Machtpotential von  $V_i$  und aus Symmetriegründen auch das von  $V_j$  ist gestiegen.

b. Nach der Voraussetzung gilt  $Q(V_j) < 1., Q(V_k) < 1.$  und  $Q(V_j V_k) > 0.$

$Q(V_i V_j V_k) = 0$   $Q(\bar{V}_i \bar{V}_j V_k)$  sei die Randverteilung auf  $V_i V_j V_k$  nach a.

$Q(V_i V_j \bar{V}_k) = 0$   $Q(\bar{V}_i V_j \bar{V}_k)$  Durch die  $\text{---}$  Kante zwischen  $V_j$  und  $V_k$

$Q(V_i \bar{V}_j V_k)$   $Q(\bar{V}_i \bar{V}_j V_k)$  und proportionales Skalieren wird die

$Q(V_i \bar{V}_j \bar{V}_k)$   $Q(\bar{V}_i \bar{V}_j \bar{V}_k)$  neue Verteilung zu

$$\begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & \hat{Q}(\bar{V}_i V_j V_k) = Q(\bar{V}_i V_j V_k)/(1 - Q(\bar{V}_i V_j V_k)) \\ \hat{Q}(V_i \bar{V}_j V_k) = Q(V_i \bar{V}_j V_k)/(1 - Q(\bar{V}_i V_j V_k)) & \hat{Q}(\bar{V}_i \bar{V}_j V_k) = Q(\bar{V}_i \bar{V}_j V_k)/(1 - Q(\bar{V}_i V_j V_k)) \\ \hat{Q}(V_i \bar{V}_j \bar{V}_k) = Q(V_i \bar{V}_j \bar{V}_k)/(1 - Q(\bar{V}_i V_j V_k)) & \hat{Q}(\bar{V}_i \bar{V}_j \bar{V}_k) = Q(\bar{V}_i \bar{V}_j \bar{V}_k)/(1 - Q(\bar{V}_i V_j V_k)) \end{array}$$

Nun gilt  $Q(V_i) = Q(V_i \bar{V}_j) < Q(V_i \bar{V}_j)/(1 - Q(\bar{V}_i V_j V_k)) = \hat{Q}(V_i).$  Die Erhöhung der Macht von  $V_j$  und  $V_k$  folgt aus a.; die Verringerung der Macht von  $V_i$  aus  $Q(V_i) < \hat{Q}(V_i).$  ■

Die Erkenntnisse aus Satz 1 bestätigen unsere Vermutung aus Abschnitt 4.2:

- Ein Knoten wird mächtiger, wenn er zu einem anderen  $\bar{\text{---}}$  adjazent wird,
- Er verliert Macht, wenn ein  $\bar{\text{---}}$  adjazenter Knoten seinerseits zu einem dritten Knoten  $\bar{\text{---}}$  adjazent wird.

Machtgewinn einerseits und Machtverhinderung Dritter andererseits sind die Handlungsmaximen der Unterdrückungsrelation.

### 5.3 Die Unterwerfung im gemischten Netz

Jetzt werden die Machtveränderungen der beteiligten Akteure bei Eingehen der Unterwerfungsrelation untersucht. Da die Relation nicht symmetrisch ist, muss zwischen positiv und negativ inzidenten Akteuren der  $\rightarrow$ -Relation unterschieden werden. Abbildung 6 zeigt die Zusammenhänge.

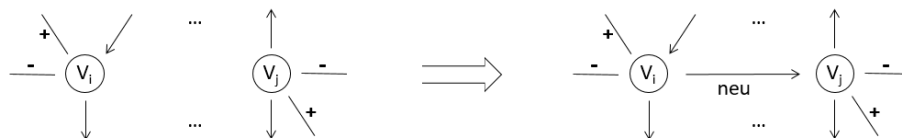


Abbildung 6: Eingehen einer Unterwerfungsrelation von  $V_j$  unter  $V_i$

Wir formulieren und beweisen folgenden Satz 2.

**Satz 2.** Es sei  $Q$  eine 3-Relationenverteilung, in der die  $\rightarrow$ -Relation von  $V_i$  unter  $V_j$  möglich, aber noch nicht vollzogen ist.

- Unterwirft sich  $V_i$  dem  $V_j$ , so wird  $V_i$  mächtiger.
- Unterwirft sich  $V_j$  dem  $V_i$ , so wird  $V_j$  mächtiger.

Beweis:

a. Laut Voraussetzung ist  $Q(V_i) < 1$ . und  $Q(V_i\bar{V}_j) < 1$ .

|                         |                                       |   |
|-------------------------|---------------------------------------|---|
| $Q(V_iV_j)$             | sei die Randverteilung auf $V_iV_j$ . | $\bar{Q}(V_iV_j) = Q(V_iV_j)/(1 - Q(V_i\bar{V}_j))$                         |
| $Q(V_i\bar{V}_j)$       | Durch die $\rightarrow$ Kante und     | $\bar{Q}(V_i\bar{V}_j) = 0$   |
| $Q(\bar{V}_iV_j)$       | proportionales Skalieren wird         | $\bar{Q}(\bar{V}_iV_j) = Q(\bar{V}_iV_j)/(1 - Q(V_i\bar{V}_j))$             |
| $Q(\bar{V}_i\bar{V}_j)$ | die neue Verteilung zu                | $\bar{Q}(\bar{V}_i\bar{V}_j) = Q(\bar{V}_i\bar{V}_j)/(1 - Q(V_i\bar{V}_j))$ |

$$\begin{aligned}
 Q(V_i) > \bar{Q}(V_i) &\Leftrightarrow Q(V_iV_j) + Q(V_i\bar{V}_j) > Q(V_iV_j)/(1 - Q(V_i\bar{V}_j)) &\Leftrightarrow \\
 Q(V_iV_j) + Q(V_i\bar{V}_j) - Q(V_iV_j)Q(V_i\bar{V}_j) - Q(V_i\bar{V}_j)^2 &> Q(V_iV_j) &\Leftrightarrow \\
 1 - Q(V_iV_j) - Q(V_i\bar{V}_j) &> 0
 \end{aligned}$$



b. Mit den gleichen Verteilungen  $Q$  und  $\bar{Q}$  wie unter a. hat man  
 $Q(V_j) > \bar{Q}(V_j) \Leftrightarrow Q(V_i V_j) + Q(\bar{V}_i \bar{V}_j) < (Q(V_i V_j) + Q(\bar{V}_i \bar{V}_j)) / (1 - Q(\bar{V}_i \bar{V}_j))$ .  
Das aber gilt, da der Nenner  $< 1$ . ■

Die Ergebnisse bestätigen die Vermutung aus Abschnitt 4.3:

- Der positiv inzidente Knoten der  $\rightarrow$ -Relation wird mächtiger.
- Der negativ inzidente Knoten wird weniger mächtig.
- Mehrfach positive bzw. negative Inzidenzen verstärken die Effekte.

Wie das Sternbeispiel im Netz 8. des Abschnittes 4.3 zeigte, kann die Unterwerfung anderer unter einen Akteur diesen sehr mächtig machen. Diese gezielte Machtausstattung ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

## 6 Grenzen der Machtbildung bei USR und UDR und ihre Überwindung durch UWR

### 6.1 Grenzen der Machtbildung bei USR und UDR

Wie in Abschnitt 4.1 und 5.1 gezeigt wurde, fördert gegenseitige Unterstützung USR nicht Macht, sondern Gleichheit. Nicht Unabhängigkeit, sondern wechselseitige Abhängigkeit. Die Autoren von [10] zeigen in Abschnitt 4.4., dass alle Knoten einer starken Zusammenhangskomponente in einem USR/ UDR-Netz das gleiche Machtpotential haben. Diese Eigenschaft überträgt man sofort auf USR/ UDR/ UWR-Netze. Der USR-Schulterschluss zwischen Akteuren macht sie gleichmächtig, das Machtniveau hängt jedoch von der Lage der Zusammenhangskomponente im Gesamtnetz ab; siehe nochmals Abschnitt 5.1 und [10], Abschnitt 4.4.

In den Abschnitten 4.2 und 5.2 wurde gezeigt, wie gegenseitige Unterdrückung Macht, aber auch Machtverhinderung fördert. Das größte Machtpotential in Abschnitt 4.2 hatte der Knoten  $V_1$  im Sternnetz 5. der Abbildung 2. Dieser Alleinstellungssituation können die übrigen Akteure durch Aufnehmen von  $\bar{\text{---}}$ -Relationen entgegenwirken, bis schließlich die Situation Netz 7. in Abbildung 2 erreicht ist. Mit der Folge des Machtausgleichs aller, der zwar immer noch  $sm = 2.322$  beträgt, aber kleiner ist als  $sm = 3.170$  für Knoten  $V_1$  im Sternnetz. Die wechselseitige Machtverhinderung ist in jedem UDR-Netz möglich. Wie man leicht nachrechnet, hat im Sternnetz mit  $n$  Knoten die Nabe die Macht  $sm = \log_2(2^{n-1} + 1)$  bei  $H = \log_2(2^{n-1} + 1)$ ; im vollständigen UDR-Netz mit  $n$  Knoten haben alle Knoten  $sm = \log_2(n + 1)$  bei  $H = \log_2(n + 1)$ . Zum Nachweis verwende man die Kontingenztafeln. Machtbildung und -verhinderung führen also zu mäßiger Macht und mäßiger Unabhängigkeit.

Die Machtbildungsmöglichkeiten bei USR und UDR sind zwar sehr verschieden, aber beide nicht überzeugend.

## 6.2 Überwindung der Grenzen durch UWR

In Abschnitt 4.3 wurden beispielhaft und in Abschnitt 5.3 mathematisch die Eigenschaften der  $\rightarrow$ -Relation aufgezeigt. Übertragung der Macht vom negativ auf den positiv inzidenten Knoten stärkt dessen potentielle Macht. Je mehr Akteure ihm Macht übertragen, umso mächtiger wird er. Natürlich sind viele Unterwerfungshierarchien denkbar, wie Abbildung 7 angedeutet.

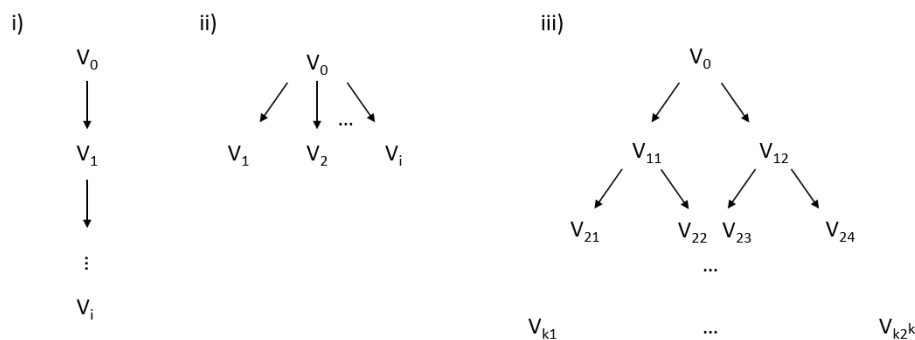


Abbildung 7: Verschiedene Unterwerfungshierarchien

In diesem Beitrag beschränken wir uns auf den Fall, wie er im Netz ii) der Abbildung 7 gezeigt ist; das Studium weiterer Hierarchien ist Gegenstand zukünftiger Forschung.

Für den Fall ii) gilt folgender Satz 3.

**Satz 3.** Für ein UWR-Netz der Form wie in Abbildung 7ii) hat man folgende Macht- und Unabhängigkeitsmaße:

- $sp_0 = \log_2(2^i + 1), sp_1 = \dots = sp_i = \log_2(2^i + 1) - \log_2(2^{i-1} + 1)$
- $H = \log_2(2^i + 1)$

Die Beweise erhält man sofort durch Aufstellung und Auswertung der Kontingenztafel.

Zum Abschluss dieses Kapitels greifen wir Beispiel 1iii) wieder auf und geben ihm in Anlehnung an [10] folgende Semantik: Die Knoten sind kriminelle Clans einer deutschen Großstadt. Durch  $\overset{+}{-}$  Kanten entsteht eine Familie miteinander sympathisierender Clans. Im Falle einer Polizeirazzia warnen sie einander. „Alle für einen, einer für alle“. Durch  $\overset{-}{-}$  Kanten sind gegnerische Clans verbunden. Mit getürkter Information versuchen sie im Falle einer Razzia, den Gegnern Schaden zuzufügen. „Jeder gegen jeden“.  $\rightarrow$  Kanten bedeuten, Machtübertragung auf mit dem Pfeil positiv inzidenten Clan. „Geben und nehmen“.

Gibt man nun die Regeln (3) aus Abschnitt 3.1 in die Expertensystemshell SPIRIT ein, erhält man die Ergebnisse wie in Tabelle 5.

| Knoten    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | $H$   |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>sm</i> | 1.322 | 1.737 | 3.322 | 1.737 | 1.322 | 1.737 | 1.737 | 1.737 | 3.322 |

Tabelle 5: Macht und Entropie zum Netzbeispiel 1iii)

Die Clans der Familie  $\{V_4, V_6, V_7, V_8\}$  sind alle gleichmächtig. Sie beziehen ihre Macht daraus, dass sie  $V_5$  und  $V_3$  die Macht entziehen können. Der Clan  $V_2$  zieht mit ihnen gleich, da er  $V_1$  und  $V_3$  die Macht entziehen kann.  $V_1$  und  $V_5$  sind gleichmächtig; sie ordnen sich  $V_3$  unter und unterdrücken  $V_2$  einerseits und den Familienclan andererseits. Man beachte, dass eine Clanfamilie  $\hat{=}$  starke Zusammenhangskomponente wie ein Clan  $\hat{=}$  Superknoten auftritt, vgl. hierzu [10], Kapitel 5. Das Unabhängigkeitsmaß ist von ursprünglich 8 auf 3.322 gefallen.

Nun wünscht die Clanfamilie eine Machtzunahme aufgrund ihrer Größe und optiert für Unterwerfung aller unter einen. Dieser eine vertritt dann ausschließlich die Familie nach außen; er wird zur **Instanz**.

Beispiel 1vi) zeigt die neue Netzstruktur. Eingabe der entsprechenden Regeln in SPIRIT liefert die Ergebnisse wie in Tabelle 6.

| Knoten    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | $H$   |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>sm</i> | 1.239 | 1.795 | 2.883 | 0.928 | 0.883 | 4.300 | 0.928 | 0.928 | 5.883 |

Tabelle 6: Macht und Entropie zum Netzbeispiel 1vi)

Wie wir sehen, hat sich das Bild gegenüber dem in Tabelle 5 vollkommen verändert. Statt  $V_3$  ist nun  $V_6$  der mächtigste Clan; er erhält Macht von  $V_4, V_7, V_8$  und unterdrückt  $V_3, V_5$ .  $V_3$  wird zur Nr. 2; er erhält Macht von  $V_1, V_5$  und unterdrückt  $V_1, V_6$ .  $V_4, V_7, V_8$  fallen auf das gleiche Machtniveau zurück; sie unterwerfen sich vollkommen dem  $V_6$ , der sie nach außen repräsentiert. Die Macht von  $V_2$  verändert sich nur leicht; er unterdrückt nach wie vor  $V_1, V_3$ , die aber ihrerseits Veränderungen erfahren haben.  $H$  nimmt zu, da frühere Abhängigkeiten wegfallen.

Das 3-Relationenmodell reagiert also sehr sensibel auf Strukturveränderungen im Netz. Der Machtindex jedes Clans trägt dieser Veränderung Rechnung - auch wenn er nicht unmittelbar betroffen ist. Der Übergang vom Zahlenmaterial in Tabelle 5 zu dem in Tabelle 6 bestätigt vollkommen unsere Intuition.

Wir schließen unsere Analyse von Beispiel 1vi) mit der Betrachtung evidenter Macht in  $V_6$ . Was passiert, wenn der Akteur in  $V_6$  seine Macht vollkommen ausübt, und welche Konsequenzen hat das auf die Machtverhältnisse im Netz. Tabelle 7 beantwortet diese Fragen.

Die 0 für Knoten 4, 6, 7, 8 bedeutet volle Machtevidenz. Sie alle sind jetzt machtvoll und haben ihr Potential ausgeschöpft. Knoten 3 und 4 sind jetzt machtlos, sie wurden von  $V_6$  unterdrückt. Machtgewinn würde für sie  $\infty$  viel Aufwand bedeuten. In der neuen Situation haben  $V_1$  und  $V_2$  zwar ihr Machtpotential verän-

| Knoten | 1     | 2     | 3        | 4 | 5        | 6 | 7 | 8 | $H$   |
|--------|-------|-------|----------|---|----------|---|---|---|-------|
| $sm$   | 1.585 | 1.585 | $\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 | 0 | 0 | 1.585 |

Tabelle 7: Machtindizes und Entropie nach Machtevidenz zum Netzbeispiel 1vi)

dert, aber nicht verloren. Die Entropie ist von 5.883 auf 1.585 gefallen; die Stringenz der Machtbeziehungen hat zugenommen.

Natürlich sind Machtbeziehungen und ihre Veränderungen in menschlichen Gesellschaften im 3-Relationenmodell noch immer sehr grob abgebildet, aber ein erster Schritt zum Verständnis von Machtbildungsprozessen ist getan: „Alle für einen, einer für alle“, „Jeder gegen jeden“, „Geben und nehmen“ sind wohl evolutiv in uns angelegt, auf was auch Beobachtungen in der Tierwelt hinweisen, vgl. [16]. Hoffentlich trägt ein besseres Verständnis von Machtbeziehungen und -veränderungen zur Bildung menschenwürdiger Gesellschaftsformen bei.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Schrift werden drei Faktoren der Machtbildung in menschlichen Gesellschaften betrachtet: „Alle für einen, einer für alle“, „Jeder gegen jeden“ und „Geben und nehmen“. In welcher Form und in welchem Umfeld haben sich diese Faktoren etabliert und welche Auswirkungen haben sie auf unser Leben. Es gelingt dann, diese komplexen Zusammenhänge in einem 3-Relationennetz zu modellieren. Dazu bedienen wir uns eines konditional-probabilistischen Regelwerks. Jede Beziehung zwischen Akteuren wird durch eine Regel modelliert und das Zusammenspiel aller Regeln in der aus der KI stammenden Expertensystemshell namens SPIRIT [14] aggregiert. Machtstrukturen unterliegen einem steten Wandel: Akteure wollen andere Beziehungen eingehen, um z.B. ihre gesellschaftliche Position zu verbessern. Auch solch eine Veränderung ist im 3-Relationennetz darstellbar. An einem Netzwerk krimineller Clans wird der Veränderungsprozess exemplifiziert.

Für zukünftige Forschung bieten sich mehrere Fragen an:

- Können die in unseren Modell sehr stringent abgefassten Regeln so abgeschwächt werden, dass sie die Realität noch besser abbilden? Nicht immer unterstützt einer den anderen bedingungslos oder bekämpft den anderen bis zu dessen völliger Aufgabe.
- In politischen Parteien, Unternehmen und anderen Institutionen gibt es zahlreiche Unterwerfungshierarchien. Wie wirken sie sich jeweils auf den Machtapparat aus?
- Welche Handlungsempfehlungen sind aus unserem bisherigen und zukünftigen Ergebnissen ableitbar? Sind sie umsetzbar?

Für Kritik und Anregungen sind wir stets offen.

## Literatur

- [1] P. Bonacich. Power and centrality: a family of measures. *American Journal of Sociology*, 92(5):1170–1182, 1987.
- [2] E. Bozzo and M. Franceschet. A theory on power in networks. *Communications of the ACM*, 59(11):75–83, 2016.
- [3] D. Brenner, A. Dellnitz, F. Kulmann, and W. Rödder. Compressing strongly connected subgroups in social networks: an entropy-based approach. *The Journal of Mathematical Sociology*, 41(2):84–103, 2017.
- [4] K. S. Cook, R. M. Emerson, M. R. Gillmore, and T. Yamagishi. The distribution of power in exchange networks: theory and experimental results. *American Journal of Sociology*, 89(2):275–305, 1983.
- [5] A. Dellnitz and W. Rödder. An entropy-based framework to analyze structural power and power alliances in social networks. *Nature Scientific Reports*, 10(1):1–12, 2020.
- [6] D. Jansen. *Einführung in die Netzwerkanalyse*. VS Verlag, Berlin, 2006.
- [7] G. Kern-Isberner. Characterizing the principle of minimum cross-entropy within a conditional-logical framework. *Artificial Intelligence*, 98(1–2):169–208, 1998.
- [8] M.E.J. Newman. *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2012.
- [9] W. Rödder, D. Brenner, and F. Kulmann. Entropy based evaluation of net structures – deployed in social network analysis. *Expert Systems with Applications*, 41(17):7968–7979, 2014.
- [10] W. Rödder, A. Dellnitz, and E. Reucher. Liberté, Égalité, Fraternité – a power study in signed networks. *Entropy*, under review:1–15, 2021.
- [11] W. Rödder and G. Kern-Isberner. From information to probability: An axiomatic approach—inference is information processing. *International Journal of Intelligent Systems*, 18:383–403, 2003.
- [12] W. Rödder, E. Reucher, and F. Kulmann. Features of the expert-system-shell spirit. *Logic Journal of IGPL*, 14(3):483–500, 2006.
- [13] S. Roman. *Introduction to Coding and Information Theory*. Springer, New York, 1997.
- [14] SPIRIT. <http://www.xspirit.de>, 2011. Last accessed on 05-01-2018.
- [15] F. Topsøe. *Informationstheorie*. Teubner, Stuttgart, 1974.

- [16] J. Zegler. *Konzepte zur Messung der Macht, Beiträge zur Politischen Wissenschaft (BPW)*. Band 23. Duncker & Humblot, Berlin, 1975.