

# Macht in signierten Netzen

Elmar Reucher\*, Andreas Dellnitz\*\* und Wilhelm Rödder\*\*\*, Elisabeth Leewe\*

Diskussionsbeiträge der Privaten Hochschule für Wirtschaft und Technik (PHWT) Nr. 2 / Juli 2020

Herausgegeben vom Präsidenten der Hochschule

Alle Rechte liegen bei den Verfassern

\*\*\* Forschungsbereich OR der FernUniversität in Hagen

<sup>\*</sup> Studienbereich Betriebswirtschaft der Privaten Hochschule für Wirtschaft und Technik (PHWT)

<sup>\*\*</sup> Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik und Quantitative Methoden der FernUniversität in Hagen

### 1 Einleitung

Macht in menschlichen Gesellschaften ist ein teils konstruktives und ein teils zerstörerisches Phänomen. In wohl allen Kulturen haben sich Soziologen, Philosophen, Ökonomen und Politiker mit dem Was und Wie von Machtbeziehungen befasst. In neueren Beiträgen zu diesem Wissenschaftszweig untersuchen Autoren wie Emerson (1962), Witte (2001), Zegler (1975) und viele andere die Frage nach Bestimmungsfaktoren von Macht. Sie versuchen herauszufinden, wer über wen Macht ausübt, in welchem Maße und mit welchen Mitteln. Welche Ressourcen und zu welchen Kosten ist der Ausübende bereit einzusetzen, und welchen Widerstand setzt der Betroffene dem entgegen. Beispielhaft zitieren wir Emerson auf S. 32:

"Power (Pab) The power of actor A over actor B is the amount of resistance on the part of B which can be potentially overcome by A."

Andere Autoren, wie Bonacich (1987), Bozzo and Franceschet (2016), übertragen dann die Überlegungen zu lokalen Machtbeziehungen auf ganze Netzwerke. Aus allgemeinen Forderungen wie etwa "An actor is powerful if it is connected to powerless actors", siehe Bozzo und Fanceschet , leiten sie mathematische Gleichungen ab, die Machtrelationen quantifizieren. Die Literatur zu Machtfragen ist schier unüberschaubar, konzentriert sich jedoch interessanterweise stets auf die Machtausübung "Macht *über* jemanden", kurz MÜ. Weniger beschäftigt man sich mit der Frage "Wer erhält Macht *von* jemandem", kurz MV. In diesem Beitrag wollen wir beide Machtrelationen betrachten und sie zusammenführen.

MV ist aus menschlichen Gesellschaften nicht wegzudenken. Beispiele sind eine Clique in einer Schulklasse, Interessenverbände wie der der Automobilindustrie, der Landwirte, der Umweltschützer etc. Auch eine studentische Verbindung trägt Charakterzüge von MV. In jedem Fall tritt eine Gruppe als homogene Einheit auf, nach dem Motto "alle für einen, einer für alle".

MÜ ist Machtausübung zwecks Meinungs- und Handlungsbeeinflussung. Wir erleben und beobachten sie in Familien, im Berufsleben, in der Politik, im Sport und in weiteren Lebensbereichen; nach dem Motto "jeder gegen jeden".

Das alles führt zu der Frage, ob mit dem in der Soziologie etablierten Instrument der *graphischen* Netzwerkanalyse sowohl MV als auch MÜ zusammenführbar und mathematisch beherrschbar sind.

Graphische Netzwerke sind Modelle von Beziehungsstrukturen, die erstmalig von Moreno (1934) eingeführt wurden. Akteure werden als Knoten und Beziehungen als Kanten dargestellt. Ist es auch möglich, Einzelakteure, Verbände und deren teils positive (MV) und negative (MÜ) Machtbeziehungen in einem solchen Modell einzufangen? Einen ersten Hinweis liefern sogenannte signierte Netze (sN), Netzwerke mit Akteuren und positiven sowie negativen Kanten. Zum besseren Verständnis betrachte man Abbildung 1. Man erkennt ganze Gruppen von Akteuren Knoten, die positiv miteinander verbunden sind, wohingegen andere negative Verbindungen haben.



Abbildung 1: Signiertes Netz

Die positiv verbundenen Knoten könnten kohäsive Teilnetze (MV) bedeuten, umgeben von und vermascht mit trennenden (MÜ) Teilen des Netzwerks. In der einschlägigen Literatur wird die Semantik solcher positiven und negativen Beziehungen z.B. als Sympathie und Antipathie ausgelegt, und es werden dann Widersprüche bei unbedachter Vergabe von + und - aufgezeigt; siehe Newman (2012), S. 206 ff. Zur Modellierung der oben näher ausgeführten Modellbeziehungen werden wir aussagenlogische Formeln verwenden; sie spiegeln eben "Macht von jemandem" und "Macht über jemanden" wider. Genauer sind diese Formeln ein konditional-probabilistisches Regelwerk, das in Rödder et al. (2014), Brenner et al. (2017), Rödder et al. (2019b), Rödder et al. (2019a), Dellnitz et al. (2020), Dellnitz and Rödder (2020) bereits zahlreiche Anwendungen zeitigte. Der Aufsatz von Dellnitz und Rödder titelt: "Measuring structural power and forming power alliances in networks – an entropy driven approach" Er analysiert MÜ-Beziehungen; MV-Beziehungen und die Verbindung beider werden nicht behandelt.

Dieser Betrag ist wie folgt aufgebaut. Im Folgekapitel werden signierte Netze dargestellt und Voraussetzungen für eine sinnvolle Zerlegbarkeit in MV-Teilnetze und MÜ-Teilnetze erarbeitet. Kapitel 3 beginnt in Abschnitt 3.1 mit konditionalprobabilistischen Präliminarien, gefolgt von der Übertragung dieses Konzepts auf sN in 3.2. Kapitel 4 definiert und quantifiziert strukturelle Macht in sN. Das geschieht in folgenden Schritten: In Abschnitt 4.1 wird der Machtbegriff in konditional-probabilistischen Netzen eingeführt, in 4.2 anhand reiner MV-Netze und in 4.3 anhand reiner MÜ-Netze illustriert. In 4.4 werden beide Sichten auf sN zusammengeführt und in 4.5 Netzveränderungen untersucht, falls nun die Macht in einem Knoten evident und mithin real ausgeübt wird. Alle Ausführungen sind um kleine Beispiele ergänzt. Kapitel 5 wendet die vorgestellten Methoden zu Modellbestimmung in signierten Netzen auf ein Kronecker-Netz mit 59 Knoten an. Das Abschlusskapitel 6 fasst zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere Forschung.

#### 2 Signierte Netze

Ein Graph ist eine Menge von Knoten  $\mathcal{V}$  und eine Menge von Kanten  $\mathcal{E}$ , die einige dieser Knoten verbinden. Graphen sind Bilder von Akteuren  $\hat{=}$  Knoten und

deren Beziehungen  $\hat{=}$  Kanten in realen sozialen Netzwerken. Die Kanten können z.B. ungerichtet, gerichtet, gewichtet oder signiert sein. Diese Ausprägungen symbolisieren dann jeweils gewisse Sachverhalte im realen Original: Ungerichtete Kanten stehen für symmetrische Beziehungen, wie etwa Freundschaft oder Verwandtschaft, gerichtete für Übertragung oder Weitergabe von materiellen Gütern oder Überzeugungen, Meinungen, Attitüden. Solche Übertragungen können gedämpft sein - materielle Güter verderben, Überzeugungen können sich nur teilweise durchsetzen -, und die Dämpfung wird durch Gewichte zum Ausdruck gebracht. Signierte Kanten wurden bereits in der Einleitung erwähnt, ihnen widmen wir den Rest dieses Kapitels.

 $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-)$  ist ein signierter Graph.  $\mathcal{E}^+$  ist die Menge positiver und  $\mathcal{E}^-$  die negativer Adjazenzen, siehe nochmals Abbildung 1. Damit die Vorstellung kohäsiver Teilnetze widerspruchsfrei umgesetzt werden kann, prägte man den Begriff "clusterfähig". Wir wählen folgende Definition 1 und zeigen dann clusterfähige und nicht clusterfähige Beispielnetze.

**Definition 1**. Ein signierter Graph ist clusterfähig, wenn er in disjunkte signierte induzierte Teilgraphen zerfällt, sodass

- es in jedem signierten induzierten Teilgraphen mit mehreren Knoten nur positive Kanten gibt,
- zwischen signierten induzierten Teilgraphen nur negative Kanten existieren.

Man beachte, dass in einem signierten *induzierten* Teilgraphen stets alle die Knoten verbindenden Kanten von  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-)$  enthalten sein müssen. Ein nur aus einem Knoten bestehender "Teilgraph" heißt entartet.

Folgende Beispiele mit Erläuterungen illustrieren die Zusammenhänge.

Beispiel 1 (clusterfähige und nicht custerfähige signierte Graphen)





Die signierten Graphen iv), v), vi) sind aus Newman (2012, S.206 ff.) entnommen; zusammen mit den übrigen zeigen sie gut das Wesentliche der Eigenschaft Clusterfähigkeit. i) zeigt ein Netz nur einer positiven Kante. Es stellt einen kohäsiven (Teil-) Graphen dar, negative Kanten gibt es nicht. ii) bzw. iii) enthält je einen induzierten Teilgraphen mit einem bzw. zwei positiven Kanten und negativen Kanten, die nicht in diesem induzierten Teilgraphen liegen. iv) hat zwei induzierte Teilgraphen mit nur positiven Kanten, zwischen denen nur negative Kanten existieren. In v) sind die drei Knoten drei induzierte "Teilgraphen", nur mit negativen Kanten inzident. Laut Definition 1 sind alle signierten Graphen i) - v) clusterfähig. Die signierten Graphen vi) und vii) sind es nicht. Der kohäsive Teilgraph in vi) ist nicht induziert, der in vii) ebenfalls nicht.

Zur Überprüfung der Clusterfähigkeit von sN hält die einschlägige Literatur Algorithmen bereit. Die eingängigen Verfahren bauen maximale kohäsive Teilnetze auf und überprüfen dann, ob es eine negative Verbindung ihrer Knoten gibt. Falls ja, gilt nicht Clusterfähigkeit; falls nein, erhält man Clusterfähigkeit.

Mit der in Kapitel 3 festzulegenden Semantik signierter Kanten bekommt die Clusterfähigkeit der Netze eine besondere Bedeutung; nicht clusterfähige Netze führen zu Widersprüchen. Mehr dazu im folgenden Kapitel.

#### 3 Konditional-probabilistische signierte Netze

#### 3.1 Konditional-probabilistische Präliminarien

Man betrachte ein sN ( $\mathcal{V}, \mathcal{E}^+ \dot{\cup} \mathcal{E}^-$ ) mit  $|\mathcal{V}|=n$ . Jeder Knoten  $V_i \in \mathcal{V}$  ist eine boolesche Variable mit  $V_i = 1$  oder  $V_i = 0$ . Für  $V_i = 1$  geht von  $V_i$  Macht aus,  $V_i = 0$  bedeutet Machtlosigkeit des Knotens,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) = (V_1 = 1/0, V_2 = 1/0, ..., V_n = 1/0)$ sind  $2^n$  Zustände des Netzes, auch Konfigurationen genannt. Auf  $\{v\}$  definieren wir Wahrscheinlichkeitsverteilungen Q; sie modellieren Machtbeziehungen. Damit sie das können, geben wir strukturierende Forderungen an.

- $Q(V_j=1|V_i=1)=1$ . und  $Q(V_i=1|V_j=1)=1$ .  $Q(V_j=0|V_i=1)=1$ . und  $Q(V_i=0|V_j=1)=1$ . für  $(i,j) \in \mathcal{E}^+$ (1+)
- für (i,j)  $\in \mathcal{E}^-$ (1-)
- $Q(V_i=1)=1$ . für einige Knoten i (1E)

Bedingte Forderungen heißen Konditionale oder Regeln, unbedingte Forderungen heißen Fakten. Die ersten beiden in (1+) erzwingen wechselseitige Machtübertragung bzw. wechselseitigen Machtempfang. Falls von Knoten Vi Macht ausgeht, wird auch  $V_j$  mächtig und umgekehrt. Die nächsten beiden in (1-) erzwingen eine wechselseitige Macht*ausübung*: Falls vom Knoten  $V_i$  Macht ausgeht( $V_i$ =1) und diese auch durchsetzbar ist (1.), dann ist  $V_j$  machtlos ( $V_j$ =0) und umgekehrt. Die Fakten bedeuten Evidenz, dass von einigen Knoten (wirklich) Macht ausgeht und nicht nur ein konditionales "falls das so ist".

Wir merken an, dass mit Kanten aus  $\mathcal{E}^+$  inzidente Akteurspaare sich gegenseitig Macht verschaffen, wie es etwa in Cliquen, Interessenverbänden oder studentischen Verbindungen der Fall ist – alle für einen, einer für alle. Solche Akteurspaare, die mit Kanten aus  $\mathcal{E}^-$  inzident sind, versuchen, ihre Nachbarn zu unterdrücken – jeder gegen jeden. Man beachte, dass ein Akteur durchaus mit einigen Nachbarn positiv und mit den anderen negativ verbunden sein kann.

Damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung Q bestmöglich die gesamte Machtstruktur widerspiegelt, muss sie sorgsam ausgewählt werden. Sie muss je nach Sachverhalt die Regeln (1+), (1-) oder Fakten (1E) erfüllen; mehr dazu im Folgekapitel. Da es i.A. viele Q gibt, die das tun, muss ein bestimmtes festgelegt werden. Diese Festlegung geschieht so, dass die Entropie in Q,  $H(Q) = -\sum_{\mathbf{v}} Q(\mathbf{v}) \log_2 Q(\mathbf{v})$ , maximiert wird. Die Entropie stammt aus der Informationstheorie von Shannon; in unserem Beitrag misst sie die Unabhängigkeit der Machtverhältnisse im Zustandsraum des Netzes. Ist Q die Gleichverteilung auf { $\mathbf{v}$ }, sind alle Variablen  $V_i$  unabhängig voneinander. Weder positive noch negative Machtbeeinflussungen sind möglich. Gilt aber  $Q(\mathbf{v}) = 1$  für ein  $\mathbf{v} \in {\mathbf{v}}$ , bedingen die Ausprägungen der  $V_i$ einander vollständig. Im ersten Fall ist H(Q) = n, im letzten gilt H(Q) = 0. Für weitere Ausführungen zum Thema Entropie siehe Kern-Isberner (1998), Rödder et al. (2014).

Die Maximierung von H(Q) auf dem Zustandsraum des Netzes bei Berücksichtigung der Vorgaben in (1+), (1-) bzw. (1E) bestimmt also ein solches Q, welches keine nicht intendierten Abhängigkeiten der Variablen zulässt, sondern eben *nur* die Vorgaben respektiert. Das führt zu den Optimierungsproblemen des folgenden Abschnitts.

#### 3.2 Bildung von Machtstrukturen in signierten Netzen

Wir betrachten drei Optimierungsaufgaben und erläutern.

$$Q_{+} = \arg \max H(Q)$$
  
u.d.N.  $Q(V_{j} = 1 | V_{i} = 1) = 1.$   
 $Q(V_{i} = 1 | V_{j} = 1) = 1.$  für  $(i, j) \in \mathcal{E}^{+}$  (2+)

 $Q_{-}=\arg\max H(Q)$ 

u.d.N. 
$$Q(V_j = 0 | V_i = 1) = 1.$$
  
 $(Q(V_i = 0 | V_j = 1) = 1.)$  für  $(i, j) \in \mathcal{E}^-$  (2-)

Da die Konditionale in Klammern redundant sind, können sie entfallen.

 $Q_{+-}= \arg \max H(Q)$ u.d.N. wie in (2+) und in (2-) (2+-)

In Aufgabe (2+) bestimmt man die Verteilung maximaler Entropie  $Q_+$  für ein Netz, in dem nur positive Kanten auftreten, wie etwa in Beispiel 1i). In Aufgabe (2-) errechnet man die Verteilung maximaler Entropie  $Q_-$  für ein Netz, in dem nur negative Kanten auftreten, wie etwa in Beispiel 1v). In Aufgabe (2+-) erfolgt die Bestimmung von  $Q_{+-}$  für allgemeine signierte Netze, wie etwa in Beispiel 1ii), iii), iv), vii).

Die Beispielnetze 1i) bis v) hatten wir als clusterfähig erkannt. Für sie sind die Regeln in den obigen Optimierungsaufgaben konsistent und die Aufgaben jeweils lösbar. Nicht so für die Netze in Beispiel 1vi) und vii). Man sieht sofort, dass z. B. in Netz vi) eine von Knoten 1 ausgehende Macht den Knoten 2 und 3 ebenfalls Macht verleiht. Ein mächtiger Knoten 2 macht andererseits Knoten 3 machtlos – ein Widerspruch. Solche Widersprüche treten nur in nicht clusterfähigen Netzen auf, nicht aber in clusterfähigen.

Abschließend notieren wir für das signierte Netz in Beispiel 1iv) die Optimierungsaufgabe (3)

$$Q_{+-} = \arg \max H(Q)$$
(3)  

$$u.d.N. \quad Q(V_3 = 1 \mid V_1 = 1) = 1. \quad Q(V_1 = 1 \mid V_3 = 1) = 1.$$
  

$$Q(V_5 = 1 \mid V_3 = 1) = 1. \quad Q(V_3 = 1 \mid V_5 = 1) = 1.$$
  

$$Q(V_6 = 1 \mid V_4 = 1) = 1. \quad Q(V_4 = 1 \mid V_6 = 1) = 1.$$
  

$$Q(V_2 = 0 \mid V_1 = 1) = 1. \quad (Q(V_1 = 0 \mid V_2 = 1) = 1.)$$
  

$$Q(V_2 = 0 \mid V_3 = 1) = 1. \quad (Q(V_3 = 0 \mid V_2 = 1) = 1.)$$
  

$$Q(V_4 = 0 \mid V_3 = 1) = 1. \quad (Q(V_3 = 0 \mid V_4 = 1) = 1.)$$
  

$$Q(V_6 = 0 \mid V_5 = 1) = 1. \quad (Q(V_5 = 0 \mid V_6 = 1) = 1.)$$

Die Regeln in Klammern können wiederum entfallen, da redundant. An späterer Stelle greifen wir die Aufgabe wieder auf und lösen sie.

Bisher wurde der Machtbegriff generisch verwendet, im Folgekapitel 4 machen wir Macht für alle Knoten sN messbar. Für MV-Netze, MÜ-Netze und gemischte Netze werden Eigenschaften dieses Machtmaßes aufgezeigt und für die Knoten des Beispielnetzes 1iv) berechnet.

#### 4 Strukturelle Macht in sN

#### 4.1 Machtmessung in konditional-probabilistischen sN

Hat man Aufgabe (2+-) gelöst und  $Q_{+-}$  bestimmt, sind  $Q_{+-}(V_i = 1)$  für i = 1, ..., n die Wahrscheinlichkeiten, dass die Knoten  $V_i$  Macht haben. Bekanntlich ist  $-\log_2 Q_{+-}(V_i = 1)$  dann die Information, die dem signierten Machtnetz zufließt,

wenn diese Wahrscheinlichkeit zu 1. und die Macht des Knotens evident wird. Lehrbücher, wie z.B. Roman (1997) und Topsœ (1974), zeigen das auf. Je größer nun für ein  $V_i$  diese Information ist, umso größer ist das Machtpotential des Knotens; die Informationsdifferenz zwischen  $-\log_2 Q_{+-}(V_i = 1)$  und  $\log_2(1.)$  misst nämlich genau die Veränderung aller wechselseitigen konditionalen Abhängigkeiten in der Machtstruktur des Netzes, vgl. Brenner et al. (2017), S.5.

Große Veränderung entspricht also großem potentiellen Einfluss bei wirklicher Machtausübung in  $V_i$ , Grund für folgende Definition.

**Definition 2**  $sm_i = -\log_2 Q_{+-}(V_i = 1)$  ist die (strukturelle) Macht in Knoten  $V_i, i = 1, ..., n$ .

Für das einfache Netz in Beispiel 1ii) geben wir die Machtpotentiale der 4 Knoten  $V_1, V_2, V_3, V_4$  an.

#### Beispiel 2 (Machtpotentiale in sN Beispiel 1ii)

Nach Lösen von Aufgabe (2+-) erhält man  $Q_{+-}$ , für das wir die Kontingenztafel angeben; sie wurde mit der Expertensystemshell SPIRIT (2011) berechnet.

$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$Q_{+-}$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$Q_{+-}$	mit	$Q_{+-}(V_1 = 1) = Q_{+-}(V_2 = 1) = \frac{1}{5}$
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0		$Q_{+-}(V_3 = 1) = Q_{+-}(V_4 = 1) = \frac{2}{5}$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0		0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0		
1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	1	0	0	0		
1	0	1	1	ŏ	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$		
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1 5		
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1 E		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	<u>1</u> 5		

Knoten  $V_1$  und  $V_2$  sind mit  $sm = -\log_2 1/5 = 2,322$  gleichmächtig, wie auch  $V_3$ ,  $V_4$  mit 1,322. Wie wir in Abschnitt 4.4 sehen werden, sind Knoten in kohäsiven Gruppen immer gleichmächtig; Knoten  $V_3$  und  $V_4$  sehen sich also gleichsam nur einem "Gegner" gegenüber und sind aus Symmetriegründen ebenfalls gleichmächtig.

In den Folgeabschnitten werden reine MV - sowie reine MU-Netze betrachtet und die jeweiligen Machtstrukturen beschrieben.

#### 4.2 Strukturelle Macht in reinen MV-Netzen

Reine MV-Netze enthalten nur positive Kanten  $V_i \stackrel{+}{\to} V_j$ . Graphentheoretisch hat eine solche Kante zwei Richtungen.  $V_i \rightarrow V_j$  und  $V_j \rightarrow V_i$ ; beide Pfeile haben in diesem Beitrag die Form von Konditionalen, siehe Aufgabe (2+). Graphentheoretisch liegt dann eine starke Zusammenhangskomponente SZK vor. Für solche konditional probabilistischen Netze werden in Brenner et al. (2017) Aussagen bewiesen, die wir hier ohne Beweise wiederholen, jedoch plausibilisieren.

**Satz 1**: Es sei  $Q_+$  Lösung von (2+). Dann gilt:

- a.  $Q_+(V_i = 1) = \frac{1}{2}$  für alle i = 1, ..., n
- b.  $sm_i = 1$ . für alle i = 1, ..., n
- c.  $H(Q_+) = 1$ .

Wegen des Regelwerkes in (2+) haben Konfigurationen **v**, in denen  $V_i = 1$  und  $V_j = 0$  für irgendein Paar  $V_i, V_j$  auftreten, die Wahrscheinlichkeit 0. Sie sind unmöglich. Bleiben also nur die Konfigurationen **v**<sub>1</sub> = ( $V_1 = 1, V_2 = 1, ..., V_n = 1$ ) und **v**<sub>2</sub> = ( $V_1 = 0, V_2 = 0, ..., V_n = 0$ ). Unter maximaler Entropie haben sie beide die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ , also  $Q_+(V_1 = 1, V_2 = 1, ..., V_n = 1) = \frac{1}{2}, Q(V_1 = 0, V_2 = 0, ..., V_n = 0) = \frac{1}{2}$ . Damit gilt Satz 1a. und folglich b. Für c. überlegt man, dass  $H(Q_+) = \frac{1}{2}(-\log_2 \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-\log_2 \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 1. + \frac{1}{2} \cdot 1. = 1.$  ist.

 $H(Q_+)$  ist die verbliebene Restunabhängigkeit nach Lösung von (2+) im MV-Netz. Sie ist mit 1. gering. Geht von auch nur einem Knoten wirklich Macht aus, profitieren alle übrigen davon. Jetzt sind alle mächtig und die Restunabhängigkeit H verschwindet.

#### 4.3 Strukturelle Macht in reinen MÜ-Netzen

Reine MÜ-Netze enthalten nur negative Kanten  $V_i - V_j$ . Beide Richtungen der Kante haben auch hier die Form von Konditionalen, siehe Aufgabe (2-). Wie dort bereits im Nachgang erwähnt wurde, können *beide* Richtungen wegen Redundanz durch nur ein Konditional repräsentiert werden. Wir geben nun Eigenschaften solcher konditional-probabilistischen Netze an, plausibilisieren, beweisen und kommentieren.

**Satz 2:** Es sei  $Q_{-}$  Lösung von (2-). Dann gilt:

- a. Ist ein MÜ-Netz  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^-)$  vollständig, so haben alle Knoten  $V_i$  die gleiche strukturelle Macht  $sm_i = \log_2(n+1) > 1$
- b. Ist ein MÜ-Netz ( $\mathcal{V}, \mathcal{E}^-$ ) vollständig, so ist die Entropie stets > 1.
- c. Ist ein MÜ-Netz  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^{-})$  unvollständig, so haben die Knoten i.A. ungleiche strukturelle Macht.
- d. Auch in unvollständigen MÜ-Netzen haben alle Knoten  $V_i$  eine strukturelle Macht  $sm_i > 1$
- e. Auch in unvollständigen MÜ-Netzen ist die Entropie stets > 1

Die Plausibilisierungen und die Beweise bedienen sich stets der Kontingenztafel von  $Q_{-}$ , die wir zur Erinnerung auf Seite 9 oben notieren.

Zu a. Wähle Knoten  $V_i$  beliebig. Wegen des Regelwerks in (2-) ist für ein  $\mathbf{v}=(v_1, ..., v_i, ..., v_n)$  die Wahrscheinlichkeit  $Q_-(\mathbf{v}) > 0$  g.d.w.



- $V_i = 1$  und alle  $V_j = 0, j \neq i$ , oder
- $V_1 = V_2 = \dots = V_n = 0$

Jede andere Konfiguration widerspricht dem Regelwerk.

Die Anzahl dieser Konfigurationen ist n + 1 und folglich hat jede von ihnen die Wahrscheinlichkeit  $Q_{-}(\mathbf{v}) = \frac{1}{n+1}$ . Somit gilt auch  $Q_{-}(V_i = 1) = \frac{1}{n+1}$  und die strukturelle Macht beträgt mithin  $sm_i = -\log_2(\frac{1}{n+1}) = \log_2(n+1) > 1$ .

Zu b. Für n+1 Konfigurationen mit jeweils der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{n+1}$  beläuft sich die Entropie H auf  $(n+1)\frac{1}{n+1}(-\log_2 \frac{1}{n+1}) = \log_2(n+1) > 1$ .

Zu c. Hierzu zeigen wir zwei Beispiele, die die Aussage belegen.

Beispiel 3 (Ungleiche strukturelle Macht in unvollständigen MÜ-Netzen)

i. Für das Netz



 $V_3$  ist also strukturell mächtiger. Das entspricht der Intuition, da er über zwei Knoten  $V_1$ ,  $V_2$  Macht ausübt;  $V_1$ ,  $V_2$  jedoch jeweils nur über einen.

ii. Für den Stern



V1 ist der strukturell mächtigste Knoten, was wieder der Intuition entspricht.

Zu d. Der Beweis zu dieser Aussage ist sperrig und wir geben ihn in Anhang A1. Hervorzuheben ist jedoch bereits hier, dass alle Knoten in beliebigen MÜ-Netzen größere strukturelle Macht als in MV-Netzen haben. Dort beträgt sie ja  $-\log_2 \frac{1}{2} = 1$ . "Jeder gegen jeden", macht mächtiger als "alle für einen".

Zu e. In b. konnten wir bereits zeigen, dass in vollständigen MÜ-Netzen die Entropie > 1 ist. Liegt nun ein unvollständiges MÜ-Netz vor, so

- vervollständige man es zu  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^{-})$  mit dem Ergebnis H > 1,
- beachte man, dass H > 1 auch das Ergebnis  $H(Q_{-})$  von (2-) mit der vollständigen – d.h. alle mit allen Knoten verknüpfenden – Menge von Regeln ist.
- entferne man nun die hinzugefügten Regeln wieder und berechne erneut (2-) mit dem Ergebnis  $H(\bar{Q}_{-})$ .
- Dann gilt wegen der Vergrößerung des Lösungsraums  $H(\bar{Q}_{-}) \ge H(Q_{-}) > 1$

Resümierend halten wir fest:

- Die strukturelle Macht aller Knoten in MÜ-Netzen ist größer als 1., sei das Netz vollständig oder unvollständig.
- Die Entropie in MÜ-Netzen ist stets größer als 1., sei das Netz vollständig oder unvollständig.

Damit haben MÜ-Netze grundsätzlich andere Eigenschaften als MV-Netze, denn dort gilt:

- Die strukturelle Macht aller Knoten in MV-Netzen ist gleich 1., sei das Netz vollständig oder unvollständig.
- Die Entropie in MV-Netzen ist stets = 1., sei das Netz vollständig oder unvollständig.

MÜ-Netze verleihen größere strukturelle Macht und strukturelle Unabhängigkeit; MV-Netze bergen geringe strukturelle Macht und strukturelle Unabhängigkeit.

#### 4.4 Strukturelle Macht in allgemeinen signierten Netzen

Wie in Abschnitt 4.1 in Definition 2 eingeführt, misst  $sm_i = -\log_2 Q_{+-}(V_i = 1)$  die strukturelle Macht in jedem Knoten  $V_i$  eines allgemeinen sN. In reinen MV-Netzen war sie stets gleich 1., siehe Satz 1 in Abschnitt 4.2. Diese Aussage geht für SZK in allgemeinen sN verloren. Da jetzt die starken Zusammenhangskomponente (n) ins Gesamtnetz eingebunden und von weiteren Regeln beeinflusst sind, bleiben die Machtpotentiale der Knoten in einer SZK zwar gleich, aber i.A. nicht gleich 1. Zum besseren Verständnis wiederholen wir Beispiel 1 ii) bzw. Beispiel 2 und erläutern.

1) Das sN

3—	-1-	(4)
	+	
	(2)	

zeigt eine SZK  $(1)^{+}(2)$ , eingebettet in ein Netz negativer Kanten. Die Kontingenztafel von  $Q_{+-}$  hierzu wiederholen wir, ebenso wie Randverteilungen und Machtpotentiale aller Knoten; siehe Beispiel 2.

$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$Q_{+-}$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$Q_{+-}$	mit	$Q_{+-}(V_1 = 1) = Q_{+-}(V_2 = 1) = \frac{1}{5}$
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0		$Q_{+-}(V_3 = 1) = Q_{+-}(V_4 = 1) = \frac{2}{5}$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0		$sm_1 = sm_2 = 2,322$
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0		$sm_3 = sm_4 = 1,322$
1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	1	0	0	0		
1	0	1	1	Ő	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$		
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1 5		
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1 5		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1 E		

Die Konfigurationen mit  $(v_1, v_2) = (1, 0)$  und mit  $(v_1, v_2) = (0, 1)$  haben laut Regeln 1<sup>+</sup>–2 die Wahrscheinlichkeit 0, die Konfiguration mit  $(v_1, v_2) = (1, 1)$ die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{5}$  und die Wahrscheinlichkeiten der Konfigurationen mit  $(v_1, v_2) = (0, 0)$  summieren sich zu  $\frac{4}{5}$ . Mit entsprechenden Konsequenzen für die Machtpotentiale: So erhalten die beiden Knoten 1 und 2 durch ihre Lage im Gesamtnetz die strukturelle Macht 2.322 und nicht 1. wie in einer isolierten SZK.

Wie angekündigt, berechnen wir nun das allgemeine signierte Netz von Beispiel 1iv) mit Hilfe der Expertensystemshell SPIRIT (2011).

Nach Eingabe der Regeln (2) aus Abschnitt 3.2 erhält man Randverteilungen der Variablen  $V_1$  bis  $V_6$  unter  $Q_{+-}$  wie in Abbildung 2 sowie *sm*-Werte wie in Abbildung 3; sie sind unter  $V_i = 1$  ablesbar.

Die Randwahrscheinlichkeiten in  $V_1$ ,  $V_3$ ,  $V_5$  sind gleich, ebenso wie die in  $V_4$ ,  $V_6$ . Die in  $V_2$  ist denen in  $V_4$ ,  $V_6$  gleich, weil die Knoten die gleiche Machtausübung auf  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_5$  zeigen.

Die Analyse von Macht in signierten Netzen kann über die beispielhaften Beobachtungen hinaus fortgeführt werden.

Als Motivation hierzu fassen wir nochmals zusammen:

- Alle Knoten einer SZK haben die gleiche Randverteilung und somit die gleiche strukturelle Macht.
- Die strukturelle Macht jedes Knotens des gesamten signierten Netzes ist größer als 1. Das gilt:

Steps Iterat	tions Relative entropy	Entropy Measu	ure of Inconsistency	Transinformation
Variables Tran	sinformation	endencies LEG Structure Im	pacts	
@ @ Q (				
P ■ abb C ■ abb C ■ C ■ V1 C ■ V2 C ■ V2 C ■ V3 C ■ V4 C ■ V4 C ■ V5 C ■ V6		P         Image: Constraint of the second of the secon	Y         Image: 0           Image: 0         Image: 0           Image: 0         Image: 0           Y         Image: 0           Image: 0         Image: 0	Y         Y
Rules Evaluation	on			
000		3000	o 99 🛛	
Root folder	Activity	P prescr	P act	
E Evaluation	×		1 1,00000	V3=1   V1=1
	×		1 1,00000	V1=1   V3=1
	r		1 1,00000	V5=1   V3=1
	×		1 1,00000	V3=1   V5=1
	<u> </u>		1 1,00000	V6=1   V4=1
	<u> </u>		1 1,00000	V4=1   V6=1
	<u> </u>		1 1,00000	V2=0   V1=1
	<u> </u>		1 1,00000	V2=0   V3=1
	<u> </u>		1 1,00000	V4=0   V3=1
	<b>K</b>		1 1,00000	V6=0   V5=1

Abbildung 2: Beispiel 1 iv) Regeln (unten) und Randverteilungen unter  $Q_{+-}$ 



Abbildung 3: Beispiel 1iv) Regeln (unten) und sm-Werte unter  $Q_{+-}$ 

- f
  ür Knoten in signierten induzierten Teilgraphen mit nur positiven Kanten, also SZK.
- für Knoten, die entartete individuelle Teilgraphen sind, also nur mit Kanten aus  $\mathcal{E}^-$  inzident sind.

Man vergleiche hierzu nochmals die Ausführungen in Kapitel 2 dieser Schrift.

Nun gibt es eine Reduktion von  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-)$  auf einem Graphen  $(\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{E}}^-)$ , der durch Kompression aller SZK ensteht. Die mathematischen Ableitungen hierzu finden sich in Brenner et al. (2017). Die für diese Schrift wichtigen Aussagen fassen wir – ohne Beweise – im Folgendem zusammen.

**Definition 3** (SZK-Kompression). Es sei  $\mathcal{V}_{SZK} \subset \mathcal{V}$  die Knotenmenge einer SZK und  $\mathcal{V}_{REM} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{SZK}$ . Dann ist die SZK-Kompression gegeben durch folgende Netzänderungen:

- $\mathcal{V}$  wird zu VS  $\cup \mathcal{V}_{REM}$ , wobei VS ein sogenannter Superknoten ist, der  $\mathcal{V}_{SZK}$  ersetzt.
- Alle Konditionale in SZK fallen weg und alle Konditionale, die Knoten aus *V*<sub>SZK</sub> mit *V<sub>j</sub>* ∈ *V*<sub>REM</sub> verbanden, verbinden nunmehr VS mit *V<sub>j</sub>* ∈ *V*<sub>REM</sub>. Dabei anfallende redundante Konditionale werden eliminiert.

Ist  $\overline{Q}_{+-}$  die Lösung von (2+-) mit Knoten VS  $\cup \mathcal{V}_{\text{REM}}$  und Konditionalen gemäß Definition 3, ist weiterhin  $Q_{+-}$  die Lösung von (2+-) mit Knoten  $\mathcal{V}$  und den Konditionalen vor Kompression, so gilt folgendes Lemma:

#### Lemma:

- i Jedes  $V_k \in \mathcal{V}_{SZK}$  hat die gleiche Randverteilung in  $Q_{+-}$ .
- ii VS hat in  $\overline{Q}_{+-}$  die gleiche Verteilung wie sie die  $V_k$  in  $Q_{+-}$  hatten.
- iii Die  $V_i \in \mathcal{V}_{\text{REM}}$  haben gleiche Randverteilungen in  $\overline{Q}_{+-}$  und  $Q_{+-}$ .
- iv Die Entropien in  $\overline{Q}_{+-}$  und  $Q_{+-}$  sind gleich.

Wegen dieses Lemmas bleibt auch die strukturelle Macht von VS der von allen  $V_k \in \mathcal{V}_{SZK}$  gleich, und die aller Knoten  $V_j \in \mathcal{V}_{REM}$  bleibt unverändert. Die SZK-Kompression ist Macht-invariant.

Wiederholt man diese Kompression für alle SZK im signierten Netz ( $\mathcal{V}, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-$ ), entsteht ein reines MÜ-Netz ( $\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{E}^-}$ ), dessen Knotenmenge alle Superknoten enthält. Für dieses MÜ-Netz mit seiner Verteilung  $\overline{Q}_-$  gilt wieder Satz 2 aus Abschnitt 4.3. Insbesondere ist die strukturelle Macht jedes Knotens aus  $\overline{\mathcal{V}}$  größer als 1. und die Entropie H > 1.

Für Beispiel 1iv) führen wir nun zwei SZK-Kompressionen durch.

#### Beispiel 4 (SZK-Kompressionen)

Abbildung 2 zeigt den Graphen zu Beispiel 1iv) vor Kompression.  $\{V_1, V_3, V_5\}$  bildet eine SZK und  $\{V_4, V_6\}$  die zweite. Die Randwahrscheinlichkeiten sind jeweils gleich, wie auch die in Abbildung 3 ausgewiesene strukturelle Macht. Kompression der beiden SZK ergibt den Graphen mit Randverteilung wie in Abbildung 4 und mit struktureller Macht wie in Abbildung 5.



Abbildung 4: SZK Kompressionen zu Beispiel 1iv) Randverteilungen in  $\overline{Q}_{-}$ 

An dieser Stelle ist u.E. ein gesellschaftspolitischer Zungenschlag zu den Analyseergebnissen struktureller Macht in signierten Netzen angebracht.

Liberté, Égalité, Fraternité

waren die Forderungen der französischen Revolution.

Freiheit, Gleichheit, (Brüderlichkeit)

sind in fast jeder Verfassung moderner Demokratien verankert. Aber wie vertragen sich solche Forderungen mit den Beziehungsstrukturen in unseren Gesellschaften?

 Ist eine Gesellschaft ausschließlich durch die MV-Relation geprägt, zeichnen sich alle Positionen darin durch ein großes Maß an Gleichheit aus; vgl. Satz 1 in Abschnitt 4.2. *H* als Maß der wechselseitigen Unabhängigkeit ist gering, was auf ein geringes Maß von Freiheit schließen lässt: Liberté, Égalité



Abbildung 5: SZK Kompressionen zu Beispiel 1iv) sm-Werte in  $\overline{Q}_{-}$ 

- Ist eine Gesellschaft ausschlie
  ßlich durch MÜ-Relationen gepr
  ägt, zeichnen sich alle Positionen darin durch eine gr
  ößere und differenzierte (!) Freiheit zur Machtaus
  übung aus, vgl. Satz 2 in Abschnitt 4.3. Die Entropie als Maß der wechselseitigen Unabh
  ängigkeit wird gr
  ößer: Libert
  é, 
  <u>Égalit
  é</u>
- Ist eine Gesellschaft sowohl durch MV-Relationen als auch durch MÜ-Relationen geprägt, zeichnen sich die Positionen innerhalb kohäsiver Teilgruppen durch große Gleichheit aus. Global betrachtet verfügen sie jedoch auch über größere strukturelle Macht, die sie aus dem überlagernden MÜ-Netz und ihre Position darin beziehen. *H* ist stets > 1. Liberté et Égalité

#### 4.5 Machtevidenz in allgemeinen signierten Netzen

Ist die Aufgabe (2+-) für ein allgemeines signiertes Netz gelöst und ist  $Q_{+-}$ berechnet, stellt sich nun die Frage, was Machtevidenz in einem Knoten mit dem gesamten sN macht. Genauer gesagt: Was geschieht, wenn nun wirklich – und nicht nur potentiell – von einem Knoten mit Sicherheit Macht ausgeht. Man vergleiche dazu nochmals unsere Ausführungen in Abschnitt 3.1 zu Fakten (1E). Fügt man beispielsweise der Regelmenge zu unserem Beispiel wie sie in (3) in Abschnitt 3.2 aufgelistet sind, das Faktum  $Q(V_3 = 1) = 1$ . hinzu, stellt sich das Ergebnis wie in den Abbildungen 6 und 7 ein. In Abbildung 6 werden alle  $V_1 = 1$ ,  $V_3 = 1$ ,  $V_5 = 1$  sicher und ebenso  $V_2 = 0$ ,  $V_4 = 0$ ,  $V_6 = 0$  sicher. Das Faktum  $V_3 = 1$  hat das gesamte sN gemäß den Regeln verändert, wie es auch sein sollte.



Abbildung 6: Beispiel 1iv) Regeln und Evidenz  $V_3 = 1$  (unten) und Randwahrscheinlichkeiten

In Abbildung 7 bedeutet eine 0. für  $V_i = 1$ , dass dieses Machtpotential bereits ausgeschöpft ist; ein  $\infty$  steht für den Fall, dass ein zusätzliches Evidenziieren zu Widersprüchen führen würde.

Evidenz verändert also ein signiertes Netz gemäß den in den Konditionalen festgelegten Relationen. Es entsteht ein neues Netz, das i.A. – anders als in dem kleinen Beispiel der Abbildungen 6 und 7 – weitere Evidenzen erlaubt. Evidenzen zeigen stets die Auswirkungen wirklicher Machtausübung in ausgewählten Positionen auf das (verbleibende) signierte Netz auf. Für eine detaillierte Darstellung der Zusammenhänge vergleiche Kapitel 3 in Dellnitz and Rödder (2020).

## 5 Macht, Unabhängigkeit und Abhängigkeit in einem signierten Kronecker-Graphen mittlerer Größe

Eine Literaturrecherche zu signierten Graphen führt schnell

- zu *gerichteten* signierten Netzen, z.B. Kim et al. (2018). Dieses Thema deckt sich nicht mit dem der vorliegenden Schrift.
- zur *Erzeugung* allgemeiner signierter Netze, siehe z.B. Jung et al. (2020), und der vergleichenden Bewertung verschiedener Methoden dazu. Die Be-

	8.8888888888			
Variables Trans	sinformation	endencies LEG Structure Impa	cts	
e @ e (				
<ul> <li>B V1</li> <li>B V2</li> <li>B V3</li> <li>B V4</li> <li>V4</li> <li>V5</li> </ul>				V6 0,0000 0 - 00 1
<b>⊶ (g</b> ) ∨6		♀ <b>()</b> V1		V5 00 0 0,0000 1
An The construction of the				
Rules Evaluation	on little		<b>II</b>	
Rules Evaluatio		30000		
Rules Evaluation	n Activity	P prescr	Pact	
Rules Evaluation	n C C C C C	P prescr	P act	V3=1   V1=1
Rules Evaluatio	n Activity	P prescr	P act 1,00000	V3=1   V1=1 V1=1   V3=1
Rules Evaluation	n Activity	P prescr	P act 1,00000 1,00000	V3=1   V1=1 V1=1   V3=1 V5=1   V3=1 V5=1   V3=1
Rules Evaluation	Activity	P prescr	P act 1,00000 1,00000 1,00000 1,00000	V3=1   V1=1 V1=1   V3=1 V5=1   V3=1 V3=1   V5=1 V3=1   V5=1
Rules Evaluatio		P prescr	Pact 1,00000 1,00000 1,00000 1,00000 0,00000 0,00000	V3=1   V1=1 V1=1   V3=1 V5=1   V3=1 V3=1   V5=1 V6=1   V4=1 V4=1   V6=1
Rules Evaluation	Activity	P prescr	P act 1,00000 1,00000 1,00000 1,00000 0,00000 0,00000 1,00000	V3=1   V1=1 V1=1   V3=1 V5=1   V3=1 V6=1   V4=1 V6=1   V4=1 V4=1   V6=1 V2=0   V1=1
Rules Evaluation	Activity	P prescr	P act 1,00000 1,00000 1,00000 1,00000 0,00000 0,00000 1,00000 1,00000 1,00000 1,00000 1,00000	V3=1   V1=1 V1=1   V3=1 V5=1   V3=1 V5=1   V4=1 V6=1   V4=1 V4=1   V6=1 V2=0   V1=1 V2=0   V3=1
Rules Evaluatio	Activity  Activity	P prescr	P act 1.00000 1.00000 1.00000 0.00000 0.00000 1.00000 1.00000 1.00000 1.00000	V3=1   V1=1 V1=1   V3=1 V5=1   V3=1 V5=1   V3=1 V6=1   V4=1 V4=1   V6=1 V2=0   V1=1 V2=0   V3=1 V4=0   V3=1

Abbildung 7: Beispiel 1iv) Regeln und Evidenz  $V_1 = 1$  (unten) und *sm*-Werte

wertung erfolgt durch den Vergleich gewisser Parameter erzeugter und realer Netze. Die Parameter beziehen sich im Wesentlichen auf Häufigkeiten von negativen und positiven Kanten und Anzahl negativer Kanten in Triaden. Hier ist anzumerken, dass Häufigkeiten von Triaden mit *einer* negativen Kante explizit ausgewiesen werden.

• zu einer Arbeit über ein signiertes Netz der Freund-/ Feindrelationen indigener Volksstämme im Hochland Neuguineas, siehe Read (1954).

Alle signierten Netze in den gesichteten Arbeiten und in den dort zitierten Schriften sind für unsere Macht- und Unabhängigkeitsanalyse unbrauchbar, da sie

- entweder gerichtet sind oder
- die Clusterfähigkeit nicht besitzen.

Bei den oben genannten Netzen mit unzulässigen Triaden ist dieses Manko offensichtlich, bei den Hochland-Volksstämmen erkennt man in Figur 5 auf Seite 41 in Read (1954) durch bloßes Hinsehen, dass eine Zerlegung gemäß Definition 1 nicht möglich ist: Bei der Zerlegung gibt es einen induzierten signierten Teilgraphen mit mehreren Knoten und positiven und negativen Kanten.

Nun ist die Clusterfähigkeit eine starke Forderung. Gemäß Definition 1 aus Kapitel 2 ist eine Konstellation wie in Beispiel 1vi) nicht möglich: Knoten 1 ist positiv verbunden mit Knoten 2 und Knoten 3. Die beiden letzteren jedoch sind aversiv zueinander. Bei der Interpretation Freundschaft/ Feindschaft mag eine solche Konstellation möglich sein, in dem hier betrachteten Machtmodell ist sie es nicht, vgl. unsere Ausführungen in Abschnitt 3.2.

Folgendes Szenario zeigt die Sinnhaftigkeit des Machtmodells und damit die Sinnhaftigkeit der Messung struktureller Macht in einem signierten Graphen.

Man betrachte wieder den Graphen Abbildung 2 bzw. 3 zu Beispiel 1iv). Das sN zeigt jetzt mafiöse Strukturen zwischen den Clans  $V_1$ , ...,  $V_6$ , die durch familiäre Bande verknüpft sind  $(V_i \stackrel{+}{-} V_j)$  bzw. die sich in großer Feindschaft gegenüberstehen  $(V_i \stackrel{-}{-} V_j)$ . Bei Kenntnis über eine bevorstehende Razzia wird jeder befreundete Clan unmittelbar informiert und erhält somit ebenfalls Kenntnis. Feindliche Clans werden durch Fehlinformationen in Unkenntnis versetzt. Strukturelle Macht  $\hat{=}$  Informationsmacht: Welche Clans können durch Information und Desinformation das gesamte Netz am stärksten beeinflussen? Die folgenden Relationen geben die Antwort:

$$V_1 \sim V_3 \sim V_5 > V_2 \sim V_4 \sim V_6.$$

Um die Berechenbarkeit struktureller Macht auch in größeren signierten Netzen nachzuweisen, erzeugen wir ein signiertes Kronecker-Netz wie folgt.

Mit dem  $2 \times 2$ -Initiator  $\begin{pmatrix} .8 & .6 \\ .5 & .3 \end{pmatrix}$  erzeugen wir mit 5 Iterationen eine  $64 \times 64$ Wahrscheinlichkeitsmatrix, die Kroneckermatrix: Für Details siehe Leskovec et al. (2010) S. 998 ff. Da der Initiator asymmetrisch ist, ist es auch die Kroneckermatrix. In einem ersten Schritt erhält man mittels gleichverteilter Zufallszahlen die Adjazenzmatrix A einer Instanz eines gerichteten Graphen: Schreibe in die Position A(i, j),  $i \neq j$  eine 1, falls der Eintrag in der Kroneckermatrix größer ist als die Zufallszahl und sonst eine 0. In einem zweiten Schritt erzeuge eine symmetrische Adjazenzmatrix B einer Instanz eines ungerichteten Graphen: Schreibe in die Postion B(i, j), i  $\neq$  j das Maximum von A(i, j) und A(j, i). Versehe in einem dritten Schritt den 1-er Einträgen in B(i, j) und B(j, i) mit einer gewünschten Wahrscheinlichkeit ein negatives Vorzeichen, mit dem Ergebnis der Adjazenzmatrix C eines signierten ungerichteten Graphen. Nun wird in einem vierten Schritt die Clusterfähigkeit des Graphen überprüft, siehe hierzu unsere Ausführungen am Ende von Kapitel 2. Die Schritte 1 bis 4 werden solange durchlaufen, bis Clusterfähigkeit erreicht ist. Zu diesem Graphen wird die Aufgabe (2+-) aus Abschnitt 3.2 gerechnet. Bei konkreter Umsetzung dieses Verfahrens entstand eine  $64 \times 64$ -Adjazenzmatrix B und ein ungerichteter Graph mit 5 isolierten Knoten. Der dritte Schritt wurde nach Eliminierung der isolierten Knoten und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 zur Erzeugung negativer Kanten durchgeführt. Es ergaben sich 8 negative und 98 positive Kanten. Der vierte Schritt erzeugte Clusterfähigkeit mit

- einer 51 Knoten umfassenden SZK,
- einer 2 Knoten umfassenden SZK,
- sechs je einen Knoten enthaltenden entarteten SZK.



Abbildung 8: Signierter Kronecker-Graph

Den signierten clusterfähigen Graphen zeigt Abbildung 8.

Die erste SZK ist mit allen übrigen "benachbart"; mindestens ein Knoten aus der einen SZK ist mit mindesten einem Knoten aus der anderen negativ adjazent. Unter den entarteten SZK gibt es solche, die nicht benachbart sind. Die eine ist nur über mindestens zwei negative Kanten von der anderen erreichbar. Die Entropie von 6,6 lässt eine starke Abhängigkeitsstruktur erkennen - nicht zuletzt aufgrund der SZK mit 51 Knoten.

Nun unterlegen wir dem signierten Netz die angekündigte mafiöse Struktur und zeigen einige Beobachtungen auf.

- Die SZK mit 51 Knoten ist mit allen übrigen SZK benachbart (s.o.). Will heißen: Erhält eine SZK Kenntnis von einer bevorstehenden Razzia, werden alle Nachbarn fehlinformiert. Man vergegenwärtige sich, dass damit selbst eine ein- oder zweielementige die viel umfassendere 51-er Clan-Familie nachhaltig gefährden kann.
- Die dyadische SZK ist mit 5 der 6 entarteten SZK nicht benachbart, sondern erst über mindestens zwei negative Kanten mit ihnen verbunden. Das hat zur Folge, dass der 2-er Clan bei Kenntnis der bevorstehenden Razzia die 5 Clans nicht durch Desinformation gefährden kann. SPIRIT vermeldet für die 5 Clans dann eine Wahrscheinlichkeit des Kenntniserhalts von 0,5. Man weiß eben nicht, ob sie von der bevorstehenden Razzia erfahren (0,5) oder nicht (0,5).
- 3. Die Verteilung struktureller Macht auf die Clanfamilien ist heterogen: Alle Mitglieder der 51-er Familie sind (natürlich) gleichmächtig mit einem Wert sm = 6, 6. Fünf der sechs entarteten SZK haben mit einem sm-Wert von ≈ 1. eine geringe strukturelle Macht, können aber dennoch mit Desinformation die Nachbarn schädigen. Eine entartete SZK und die Dyade sind mit einem sm-Wert von 1,6 gleichmächtig. Sie haben mittlere strukturelle Macht.

- - fällt die Entropie von 6,6 auf 0., falls die 51-er Famililie sicher informiert wird. Sie vermag dann alle anderen durch Fehlinformation zu schädigen.
  - fällt die Entropie von 6,6 auf 5., falls sich der 2-er Clan oder der gleichmächtige 1-er Clan der Razzia sicher ist. Sie können sich dann "nur" gegenseitig oder die Großfamilie schädigen.
  - fällt die Entropie von 6,6 auf ca. 5,588, falls einer der restlichen Clans von der Razzia erfährt. Er kann dann jeweils nur die Großfamilie fehlinformieren.

Die Analyseergebnisse zu Machtverhältnissen in signierten Netzen sind also vielschichtig und aufschlussreich. Sie gehen weit über die oft übliche bloße Beschreibung von Charakteristika solcher Netze – Anteil negativer Kanten, Anzahl von Triaden, etc. – hinaus. Vielleicht stehen wir ja am Anfang eines tieferen Verständnisses von Macht*entwicklungen* in unserer Gesellschaft?

### 6 Zusammenfassung und Ausblick

Eine entropiebasierte Form der Messung von Macht ist bereits Gegenstand der Arbeit "An entropy-based framework to analyse structural power and alliances in social networks" Dellnitz and Rödder (2020). Während dort nur wechselseitige Aversion repräsentierende negative Kanten im Netz betrachtet wurden, geht der vorliegende Beitrag einen Schritt weiter: Er betrachtet negative und positive Kanten, also signierte Netze. Im Gegensatz zu den negativen Kanten modellieren die positiven wechselseitige Sympathie. Auch in solchen komplexeren Netzen kann die strukturelle Macht jedes Knotens bestimmt werden, falls sie – die Netze – "balanced" oder genauer clusterfähig sind. Sie ist dann Ausdruck der Enflussmöglichkeit des jeweiligen Knotens auf die Machtverhältnisse im gesamten Netz. Bei großen Netzen bedarf es zur Machtmessung einer Optimierungssoftware; hier wurde die Expertensystemshell SPIRIT (2011) gewählt. Für ein signiertes Kronecker-Netz mit – nach Eliminierung isolierter – 59 Knoten werden entsprechende Analyseergebnisse vorgestellt.

Clusterfähigkeit eines signierten Netzes ist eine starke Forderung. Ein weiterer Forschungsgegenstand könnte die Frage sein, ob auch in nicht clusterfähigen signierten Netzen Machtmessung im entropiebasierten Modell möglich ist. Bisher sind mit positiven und negativen Kanten wechselseitige Sympathie und/oder Aversion abbildbar. Gibt es auch weitere Relationen, die in diesem Modell erfasst werden können?

#### Anhang

Beweis zu Satz 2d: In unvollständigen MÜ-Netzen haben alle Knoten  $V_i$  eine strukturelle Macht sm > 1.

Wähle bel.  $V_i$  und o. B. d. A. einen adjazenten Knoten  $V_j$  sowie  $V_k \in \mathcal{V}_{Rest}$ 

- 1. In einem MÜ-Netz können in Kontingenztafeln nur positive Werte stehen, falls nicht 1, 1 bei adjazenten Knoten gelten.
- 2. Steht zu Konfiguration mit  $V_i = 1$  eine positive Wahrscheinlichkeit, so auch zu der Konfiguration mit  $V_i = 0$  und sonst identisch.
- 3. ∃ Konfiguration v mit V<sub>i</sub> = 1, V<sub>j</sub> = 1, V<sub>k</sub> = 0 ∀ V<sub>k</sub> ∈ V<sub>Rest</sub>. Zu dieser Konfiguration ist Q<sub>-</sub>(v) = 0, da V<sub>i</sub>, V<sub>j</sub> adjazent. Sei Konfiguration v mit V<sub>i</sub> = 0, V<sub>j</sub> = 1, V<sub>k</sub> = 0 ∀ V<sub>k</sub> ∈ V<sub>Rest</sub>. Für diese gilt Q<sub>-</sub>(v) > 0, da keine Regel verletzt wird.
- 4. Alle positiven Wahrscheinlichkeiten sind in  $Q_{-}$  gleich.
- 5.  $\sum_{\mathbf{v} \text{ mit } V_i=1} Q_-(\mathbf{v}) < \sum_{\mathbf{v} \text{ mit } V_i=0} Q_-(\mathbf{v})$  $\implies Q_-(V_i=1) < Q_-(V_i=0)$  $\implies Q_-(V_i=1) < \frac{1}{2}$  $\implies -\log_2 Q_-(V_i=1) > 1$

### Literatur

- P. Bonacich. Power and centrality: a family of measures. American Journal of Sociology, 92(5):1170–1182, 1987.
- E. Bozzo and M. Franceschet. A theory on power in networks. *Communications* of the ACM, 59(11):75–83, 2016.
- D. Brenner, A. Dellnitz, F. Kulmann, and W. Rödder. Compressing strongly connected subgroups in social networks: an entropy-based approach. *The Journal of Mathematical Sociology*, 41(2):84–103, 2017.
- A. Dellnitz and W. Rödder. An entropy-based framework to analyze structural power and power alliances in social networks. *Nature Scientific Reports*, 10(1): 1–12, 2020.
- A. Dellnitz, E. Reucher, and W. Rödder. How to avoid weight inconsistencies in social networks – an entropy-driven approach. *Proceedings of The Thirty-Third International FLAIRS Conference*, pages 609–612, 2020.
- R. M. Emerson. Power-dependence relations. *American Sociological Review*, 27 (1):31–41, 1962.

- J. Jung, H. Park, and U Kang. Balansing: Fast and scalable generation of realistic signed networks. 23rd International Conference on Extending Database Technology (EDBT), 2020.
- G. Kern-Isberner. Characterizing the principle of minimum cross-entropy within a conditional-logical framework. *Artificial Intelligence*, 98(1–2):169–208, 1998.
- J. Kim, H. Park, J. Lee, and U Kang. Side: Representation learning in signed directed networks. WWW '18: Proceedings of the 2018 World Wide Web Conference, pages 509–518, 2018.
- J. Leskovec, D. Chakrabarti, J. Kleinberg, C. Faloutsos, and Z. Ghahramani. Kronecker graphs: An approach to modeling networks. *Journal of Machine Learning Research*, 11:985–1042, 2010.
- J. L. Moreno. Who Shall Survive: A New Approach to the Problem of Human Interrelations. Nervous and Mental Disease Publishing Co., Washington, DC, 1934.
- M.E.J. Newman. *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2012.
- K. E. Read. Cultures of the central highlands, new guinea. Southwestern Journal of Anthropology, 10(1):1–43, 1954.
- W. Rödder, D. Brenner, and F. Kulmann. Entropy based evaluation of net structures deployed in social network analysis. *Expert Systems with Applications*, 41(17): 7968–7979, 2014.
- W. Rödder, A. Dellnitz, I. Gartner, and S. Litzinger. Weight prediction on missing links in social networks: a cross-entropy-based approach. *Journal of Applied Logics*, 1(6):83–104, 2019a.
- W. Rödder, A. Dellnitz, F. Kulmann, S. Litzinger, and E. Reucher. Bipartite structures in social networks: Traditional versus entropy-driven analyses. *Entropy*, 21(3):277, 2019b.
- S. Roman. Introduction to Coding and Information Theory. Springer, New York, 1997.
- SPIRIT. http://www.xspirit.de, 2011. Last accessed on 2019-08-08.
- F. Topsœ. Informationstheorie. Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart, 1974.
- E. H. Witte. Theorien zur sozialen Macht. Forschungsbericht, Universität Hamburg, 2001.
- J. Zegler. Konzepte zur Messung der Macht, Beiträge zur Politischen Wissenschaft (BPW). Band 23. Duncker & Humblot, Berlin, 1975.